GGE RESPONDE
IME 2020
MATEMÁTICA (2ª FASE)

01. Sejam *a* e *b* raízes da equação $x^2 - 4x + M = 0$, *c* e *d* raízes da equação $x^2 - 36x + N = 0$. Sabendo-se que *a, b, c* e *d* formam uma progressão geométrica crescente, determine o valor de *M* + *N*.

Resolução:

$$\begin{array}{lll} a+b=4 & c+d=36 & a,b,c,d \Rightarrow pg \\ ab=M & cd=N & (a,aq,aq^2,aq^3) \end{array}$$

$$(i)\begin{cases} a+aq=4 \\ aq^2+aq^3=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a(1+q)=4 \\ aq^2(1+q)=36 \end{array} \Rightarrow \frac{1}{q^2}=\frac{1}{9} \rightarrow \boxed{q=\pm 3}$$

Mas a PG é crescente $\therefore \boxed{q=+3} \,\, (i)\, a+3a=4$

$$4a=4 \rightarrow \boxed{a=1}$$

Logo:
$$\begin{array}{l} a=1 \\ b=aq=1\cdot 3=3 \\ c=aq^2=1\cdot 9=9 \\ d=aq^3=1\cdot 27=27 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} M=a\cdot b=1\cdot 3=3 \\ N=cd=9\cdot 27=243 \end{array}\right\} \therefore \boxed{M+N=243+3=246}$$

02. Seja uma região **S** no plano complexo que consiste em todos os pontos Z tais que $\frac{Z}{20}$ e $\frac{20}{\bar{Z}}$ possuem partes real e imaginária entre 0 e 1, inclusive. Determine a área da região **S**.
Obs: $\bar{Z}$ é o conjugado do número complexo Z.

Resolução:

Seja Z = x + i

Como $\frac{Z}{20}$ tem par real e imaginária em [0, 1]

Temos,

$$0 \le \frac{x}{20} \le 1 \quad e \quad 0 \le \frac{y}{20} \le 1$$

$$\boxed{0 \le x \le 20}\ (I) \quad e \quad \boxed{0 \le y \le 20}\ (II)$$

Como

$$\frac{20}{\bar{Z}} = \frac{20Z}{Z\cdot\bar{Z}} = \frac{20Z}{|Z|^2}$$

Temos

$$\frac{20}{\bar{Z}} = \frac{20x}{x^2+y^2} + \frac{20y}{x^2+y^2}\cdot i$$

Logo

$0 \leq \dfrac{20x}{x^2+y^2} \leq 1 \quad$ e $\quad 0 \leq \dfrac{20y}{x^2+y^2} \leq 1$

$0 \leq 20x \leq x^2+y^2 \quad$ e $\quad 0 \leq 20y \leq x^2+y^2$

Como

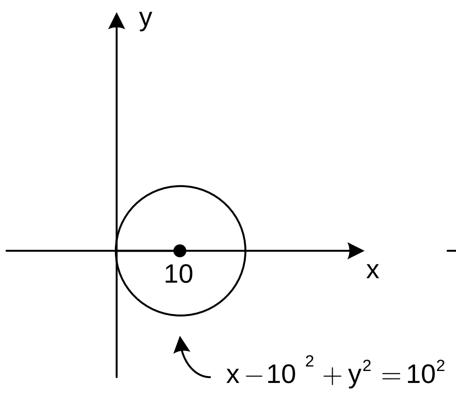
$x \geq 0 \;$ e $\; y \geq 0$

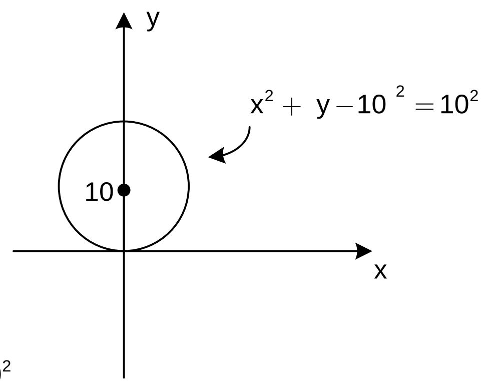
Temos

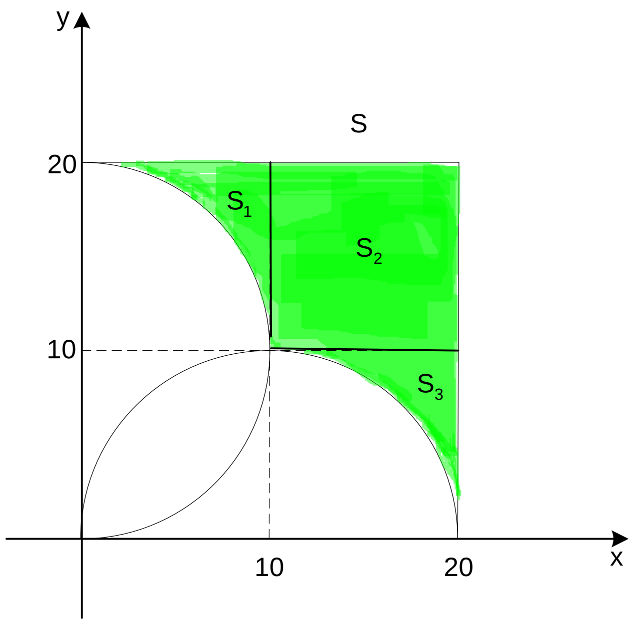
$x^2+y^2-20x \geq 0 \quad$ e $\quad x^2+y^2-20y \geq 0$

$x^2-2\cdot x\cdot 10+100+y^2 \geq 100 \quad$ e $\quad x^2+y^2-2\cdot y\cdot 10+100 \geq 100$

$\boxed{(x-10)^2+y^2 \geq 10^2}$ (III) e $\boxed{x^2+(y-10)^2 \geq 10^2}$ (IV)







A área de S é:

$$A_S = A_{S_1} + A_{S_2} + A_{S_3}$$

$$A_{S_1} = A_{S_3} = 10^2 - \frac{1}{4}\pi \cdot 10^2$$

$$= 25 \cdot (4 - \pi)$$

Portanto

$$A_S = 50 \cdot (4 - \pi) + 100$$

$$A_S = 50 \cdot (6 - \pi)$$

03. Os modelos de placas de identificação de automóveis adotadas no Brasil estão sendo atualizados. Atualmente, o modelo antigo ABC1234 (três letras seguidas de quatro algarismos) está sendo gradativamente substituído pelo modelo novo ABC1D23 (três letras seguidas de um algarismo, uma letra e dois algarismos).

Placas de modelos distintos podem apresentar sequências de caracteres alfanuméricos iguais. Por exemplo, a sequência de caracteres "20" aparece nas combinações IME2020 e BRA5P20, enquanto a sequência "A12" aparece nas combinações BRA1234 e IME4A12.

Considere a placa do modelo antigo IME2019. Seja P o conjunto de placas do modelo novo que podem ser formadas com alguma sequência de três caracteres em comum com a placa IME2019. Determine o número de elementos de P. Por exemplo, IME4A12 e BRA5E20 pertencem ao conjunto P. IMP5E19 não pertence ao conjunto P.
Obs: considere o alfabeto com 26 letras.

Resolução:

Princípio da Inclusão-Exclusão

Seja o conjunto A da forma: I M E __ __ __ __
Seja o conjunto B da forma: __ M E 2 __ __ __
Seja o conjunto C da forma: __ __ __ __ E 2 0

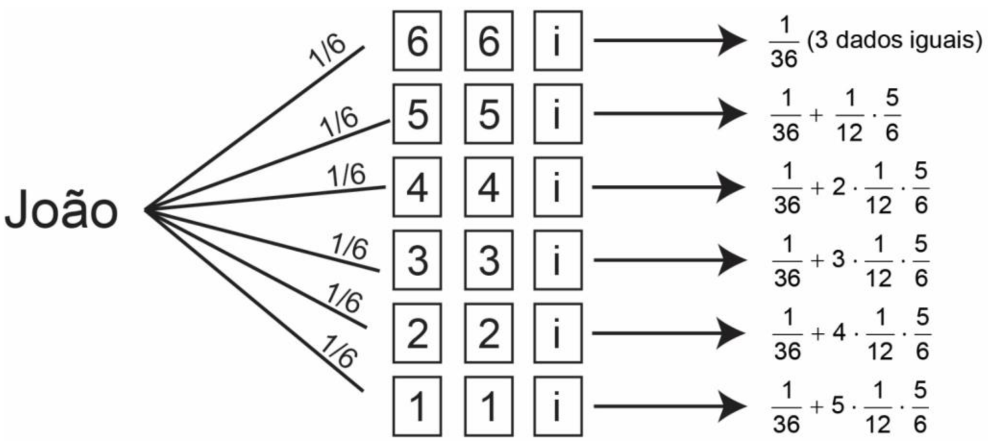
#P = (A∪B∪C) = #A + #B + #C - #(A∩B) - #(A∩C) - #(B∩C) + #(A∩B∩C)

- #A = IME · 10 · 26 · 10 · 10 = 26.000
- #B = 26 · ME2 · 26 · 10 · 10 = 67.600
- #C = 26 · 26 · 26 · 10 · E20 = 175.760
- #(A∩B) = IME2 · 26 · 10 · 10 = 2.600
- #(A∩C) = IME · 10 · E20 = 10
- #(B∩C) = 26 · ME2E20 = 26
- #(A∩B∩C) = IME2E20 = 1

Logo, #P = 26.000 + 67.600 + 175.760 = 2.600 – 10 – 26 + 1 = 266.725

04. Em um jogo, João e Maria possuem cada um três dados não viciados com seis faces numeradas de 1 a 6. Cada um lançará os seus dados, sendo João o primeiro a lançar. O vencedor será aquele que obtiver o maior número de dados com resultados iguais. Em caso de empate, vencerá aquele que tiver o maior número nos dados de igual resultado. Se ainda houver empate, não haverá vencedor. Suponha que João obteve apenas dois dados com mesmo resultado. Qual é a probabilidade de Maria vencer o jogo?

Resolução: Para Maria vencer João, ela pode tirar 3 dados iguais, ($P = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$) OU fazer uma dupla maior que a dupla de João ($P = n\cdot 3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$) onde **n** é a quantidade de números maiores que a dupla de João, $3\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$ é a probabilidade de tirar 2 dados iguais e o terceiro distinto.



$$P = \frac{1}{6}\cdot\left[6\cdot\left(\frac{1}{36}\right) + \frac{5}{72}(1+2+3+4+5)\right]$$

$$P = \frac{1}{36} + \frac{5\cdot\cancel{15}}{72\cdot\cancel{6}} = \frac{5\cdot 5}{72\cdot 2}$$

$$P = \frac{1}{36} + \frac{25}{144} = \frac{29}{144}$$

RESPOSTA: $\boxed{\frac{29}{144}}$

05. Uma matriz A é semelhante a uma matriz B se e somente se existe uma matriz invertível P tal que A = P B P^{-1}.

a) Se A e B forem semelhantes, mostre que det(A) = det(B).

b) Dadas $C=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ e $D=\begin{pmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, verifique se essas matrizes são semelhantes.

Resolução:

a) A semelhante *a* B $\Leftrightarrow \exists P$, com det (P) $\neq$ 0 tal que A=P.B.P^{-1}

Ora, se A=P.B.P^{-1} $\Rightarrow$ AP = PB $\Rightarrow$ det AP = det PB

$\Rightarrow$ det A . det P = det P. det B $\xrightarrow{\det P \neq 0}$ $\boxed{\text{det A = det B}}$

b) Calculamos os autovalores das matrizes:

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & 2\\ 3 & 5-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-9\lambda+14\Rightarrow\lambda_1=2 \text{ e } \lambda_2=7$$

$$\begin{vmatrix}8-\lambda & -2\\ 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-9\lambda+14\Rightarrow\lambda_1=2 \text{ e } \lambda_2=7$$

Logo, como os autovalores de C e D são iguais, então C e D são semelhantes.

06. Sabendo que $i^2 = -1$, encontre todos os valores reais de *x* que satisfazem a seguinte inequação:

$$\text{Re}\left\{\frac{2\log_2 \text{sen}(x)+1}{i(e^{2ix}-2\cos^2(x)+1)}\right\}>0$$

onde Re{Z} é a parte real do número complexo Z.

Resolução:

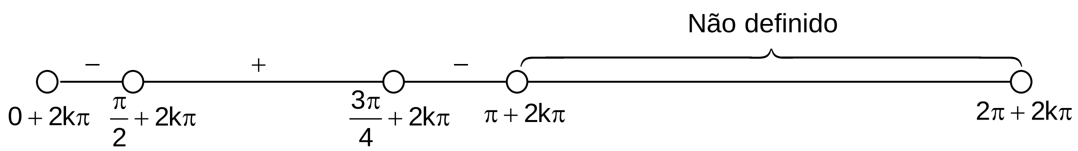
Seja $E=\dfrac{2\log_2(\text{senx})+1}{i\left(e^{2ix}-2\cos^2 x+1\right)}$. Assim, usemos as seguintes identidades: $\begin{cases}e^{2ix}=\cos 2x+i\,\text{sen}2x\\ 2\cos^2 x-1=\cos 2x\end{cases}$

O que resultará em $E=\dfrac{2\log_2(\text{senx})+1}{i(i\,\text{sen}2x)}\Rightarrow E=\dfrac{2\log_2(\text{senx})+1}{-\text{sen}2x}$.

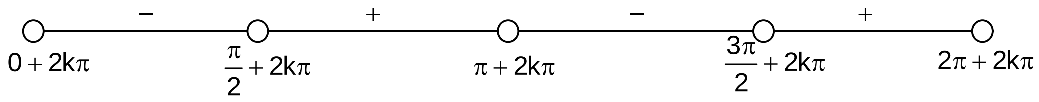
Para sen x $\leq$ 0, $\log_2$ senx não está definido, bem como E. Também temos E não definido para sen2x = 0 $\Leftrightarrow$ senx = 0 ou cosx = 0.

Nos outros casos, ou seja, $x\in\left(2\pi k,2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(2\pi k+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\pi\right), k\in\mathbb{Z}$, E é real $\Rightarrow \text{Re}\{E\}=E$. Assim, analisemos os sinais de E, estudando os sinais do numerador E do denominador:

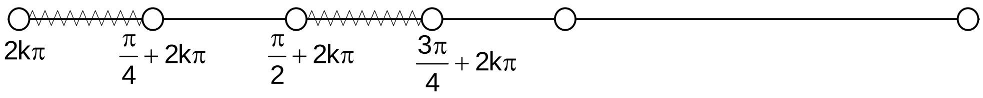
i) $2\log_2(\text{senx})+1:(*)$



ii) $\dfrac{1}{-\text{sen}2x}$: muda de sinal a cada intervalo de $\dfrac{\pi}{2}$.



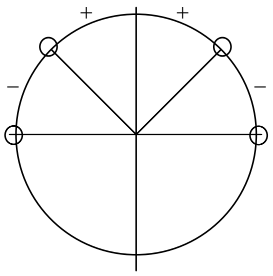
iii) soluções de $R\{E\} > 0$



Logo, $S = \left(2k\pi, \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ é solução de $\text{Re}\{E\} > 0$.

(*) Muda de sinal em $\dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{3\pi}{4}$ pois $2\log_2 \text{sen}x + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ou, graficamente,



07. Seja $\dfrac{1}{b} = \text{sen}\dfrac{\pi}{14} \cdot \text{sen}\dfrac{3\pi}{14} \cdot \dfrac{5\pi}{14}$. Determine b, onde b pertence ao conjunto dos números inteiros não nulos.

Resolução:

$$\frac{1}{b} = sen\frac{\pi}{14} \cdot sen\frac{3\pi}{14} \cdot sen\frac{5\pi}{14} \quad , \in \mathbb{Z}^*$$

Como :

$$sen\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \Rightarrow \frac{1}{b} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{14}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{14}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{14}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b} = \cos\frac{3\pi}{7} \cdot \cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{1\pi}{7}$$

Também :

$$\cos\frac{\pi}{7} = -\cos\frac{6\pi}{7}; \cos\frac{3\pi}{7} = -\cos\frac{4\pi}{7};$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b} = \left(-\cos\frac{4\pi}{7}\right) \cdot \cos\frac{2\pi}{7} \cdot \left(-\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b} = +\cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{6\pi}{7}$$

Seja

$$w = \cos\frac{\pi}{7} \Rightarrow w^7 = 1,\ \cos\frac{2k\pi}{7} = \frac{w^k - w^{-k}}{2}$$

Logo

$$\frac{1}{b} = +\left(\frac{w^2 + w^{-2}}{2}\right)\cdot\left(\frac{w^1 + w^{-1}}{2}\right)\cdot\left(\frac{w^3 + w^{-3}}{2}\right)$$

$$\frac{1}{b} = \left(w^2 + w^5\right)\cdot\left(w + w^6\right)\cdot\left(w^3 + w^4\right)\cdot\left(+\frac{1}{8}\right)$$

$$\frac{1}{b} = w^2\cdot\left(1 + w^3\right)\cdot w\left(1 + w^5\right)\cdot w^3\left(1 + w\right)\cdot\left(+\frac{1}{8}\right)$$

$$\frac{1}{b} = w^6\cdot\left(1 + 2w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6\right)\cdot\left(+\frac{1}{8}\right)$$

Como :

$$w^7 - 1 = (w-1)\cdot(w^6 + w^5 + w^4 + w^3 + w^2 + w + 1) \text{ e } w \neq 1,$$

Então :

$$w^6 + w^5 + w^4 + w^3 + w^2 + w + 1 = 0$$

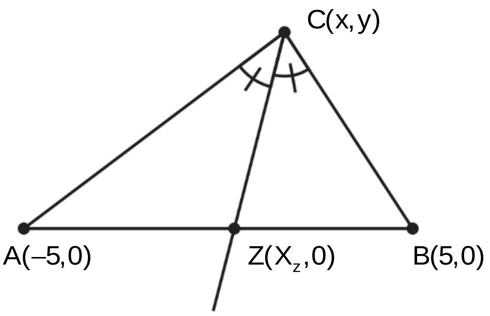
$$\Rightarrow \frac{1}{b} = w^6\cdot(0 + w)\cdot\left(+\frac{1}{8}\right) = \underbrace{w^7}_{=1}\cdot\left(+\frac{1}{8}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b} = +\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow b = 8$$

08. Os pontos *A* (-5,0) e *B* (5,0) definem um dos lados do triângulo *ABC*. A bissetriz interna do ângulo correspondente ao vértice *C* é paralela à reta de equação 14*x* – 2*y* + 1 = 0. Determine o valor da excentricidade do lugar geométrico definido pelo vértice *C* deste triângulo.

Resolução:



Reta CZ $\in$ feixe de retas paralelas

$$y = 7x + k$$

$$\therefore \frac{y - 0}{x - x_z} = 7$$

$$\therefore y = 7x - 7x_z$$

$$\therefore 7x_z = 7x - y$$

$$x_z = \frac{7x - y}{7}$$

Propriedade de bissetriz interna do triângulo:

$$\frac{AC}{AZ} = \frac{BC}{ZB} \rightarrow \frac{\sqrt{(x+5)^2 + y^2}}{x_z + 5} = \frac{\sqrt{(x-5)^2 + y^2}}{5 - x_z}$$

$$\left[(x+5)^2+y^2\right](5-x_z)^2=(x_z+5)^2\cdot\left[(x-5)^2+y^2\right] \text{ mas } x_z=\frac{7x-y}{7}$$

$$\left[(x+5)^2+y^2\right]\left(5+\frac{y-7x}{7}\right)^2=\left(\frac{7x-y}{7}+5\right)^2\left[(x-5)^2+y\right]$$

$$\left[(x+5)^2+y^2\right]\frac{(35+y-7x)^2}{\cancel{49}}=\frac{(7x-y+35)^2}{\cancel{49}}\left[(x-5)^2+y^2\right]$$

$$\left[(x+5)^2+y^2\right]\left[(35+\underbrace{(y-7x)}_{w}\right]^2=\left[35-\underbrace{(y-7x)}_{w}\right]^2\left[(x-5)^2+y^2\right]$$

$$((x+5)^2+y^2)(35+w)^2=(35-w)^2[(x-5)^2+y^2]$$

$$((x+5)^2+y^2)(35^2+70w+w^2)=(35^2-70w+w^2)((x-5)^2+y^2)$$

$$\begin{array}{ll}
(x+5)^2\cdot 35^2+\cancel{y^2\cdot 35^2}+ & 35^2(x-5)^2+\cancel{35^2\cdot y^2} \\
(x+5)^2\cdot 70w+y^2\cdot 70w+ & -70w(x-5)^2-70w\cdot y^2 \\
(x+5)^2\cdot w^2+\cancel{y^2\cdot w^2}= & +w^2(x-5)^2+\cancel{w^2\cdot y^2}
\end{array}$$

$$35^2((x+5)^2-(x-5)^2)+70w[(x+5)^2+(x-5)^2]+y^2\cdot 70w\cdot 2+w^2((x+5)^2-(x-5)^2)=0$$

$$35^2(2\cancel{0}x)+7\cancel{0}w(2x^2+50)+14\cancel{0}wy^2+w^2(2\cancel{0}x)=0^{\div 10}$$

$$2\cdot 35^2x+2\cdot 7w(x^2+25)+2\cdot 7wy^2+2w^2x=0^{\div 2}$$

$$35^2x+7w(x^2+25)+7wy^2+w^2x=0$$

$$35^2x+7w(x^2+y^2+25)+w^2x=0$$

$$35^2x+7(y-7x)(x^2+y^2+25)+(y-7x)^2\cdot x=0$$

$$(35^2+(y-7x)^2)x+7(y-7x)(x^2+y^2+25)=0$$

$$(35^2+y^2-14xy+49x^2)x+(7y-49x)(x^2+y^2+25)=0$$

$$\cancel{35^2x}+\underset{=}{y^2x}-\underline{14x^2}y+\cancel{49x^3}+\underline{7x^2}y+7y^3+7\cdot 25y-\cancel{49x^3}-49xy^2-\cancel{\underset{=}{49}\cdot 25x}=0$$

-48y²x – 7x²y + 7y³ + 7 · 25y = 0 ÷ y
-48xy – 7x² + 7y+ + 7 · 25 = 0
7x² + 48xy - 7y² = 7 · 25 ÷ 7

$$x^2+\frac{48}{7}xy-y^2=25$$

$$x^2+\frac{48}{7}xy-y^2-25=0$$

$$A+C=A'+C'=1+(-1)=0\rightarrow A'=-C'$$

$$B^2-4AC=B'^2-4A'C'$$

$$\Rightarrow -4A'C'=\frac{2304}{49}+4=\frac{2500}{49}$$

$$\Rightarrow A'C'=-\frac{625}{49}$$

$$w^2-\frac{625}{49}=0\rightarrow w=\frac{\pm 25}{7}$$

$$\frac{25x'^2}{7}-\frac{25y'^2}{7}=25 \quad (\div 25)$$

$$\frac{x'^2}{7}-\frac{y'^2}{7}=1$$

$c^2 = a^2 + b^2$ como $a = b$, $c^2 = 2a^2$.

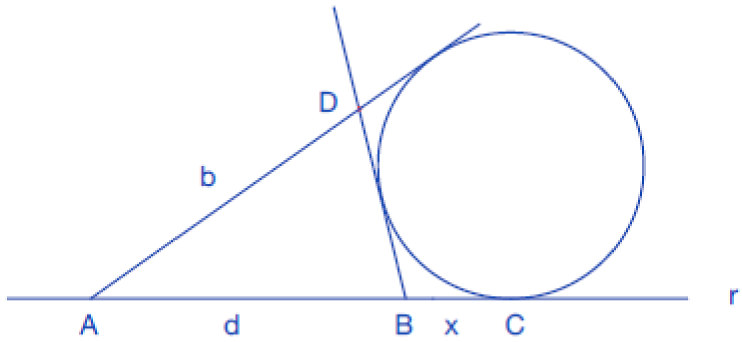
Portanto

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$$

09. Sobre uma reta *r* são marcados três pontos distintos *A*, *B* e *C*, sendo que *C* é um ponto externo ao segmento de reta $\overline{AB}$. Determine o lugar geométrico das interseções das retas tangentes a partir de *A* e *B* a qualquer circunferência tangente à reta *r* no ponto *C*. Justifique sua resposta.

Resolução:

Dada uma circunferência qualquer tangente à *r* em C, considere as retas tangentes a *r* passando por A e B.



Note que a reta *r* coincide com uma das retas tangentes a circunferência a partir de A e B. Logo a própria reta *r* está contida no lugar geométrico em questão.

Agora, seja D o ponto de interseção das outras duas retas tangentes a partir de A e B. Sejam AB=*d*, AD=*b*, BD=*a*, BC=x e *p* o semiperímetro do triângulo ABD.

Observe que *a* e *x* são fixados.

Sabemos, dos segmentos notáveis de um triângulo em relação à circunferência exinscrita, que

$$x=p-d=(a+b+c-2d)/2.$$

Implica que

$$a+b=2x+d$$

Assim, temos que o ponto D pertence a uma elipse de focos A e B e eixo maior de medida 2BC + AB.

Reciprocamente, se D é um ponto arbitrário desta elipse, que não pertence a reta AB, é possível construir uma circunferência tangente a r em C, tal que D é o ponto de interseção das retas tangentes a esta circunferência em C a partir de A e B. Para isso, basta considerar a circunferência ex-inscrita ao triângulo ABD, cujo centro é o ponto de interseção das bissetrizes externas associadas aos vértices B e D.
Usando o mesmo argumento de antes, é possível concluir que o ponto C' de interseção desta circunferência com a reta AB é tal que BC' = p-d. Portanto, C' coincide com C.

Desta forma, o lugar geométrico pedido é a união da reta r com elipse descrita anteriormente.

10. Um determinado material radioativo, com volume inicial $Q0$, é manipulado numa usina nuclear. A cada dia o resíduo impuro da substância é descartado, através de uma ligação por um pequeno orifício, num invólucro lacrado em formato de paralelepípedo retângulo. No primeiro dia, a quantidade $D1$ descartada corresponde a 1/3 do volume inicial do material e, de um modo geral, a quantidade Dn descartada no
n-ésimo dia é dada pela relação:

$$D_n = \frac{1}{3}D_{n-1}, \text{para } n \geq 2.$$

Determine as dimensões do invólucro (altura, largura e profundidade) onde se armazena o material descartado de modo que o custo de fabricação seja mínimo (isto é, a superfície lateral tenha área mínima) e tenha capacidade prevista de armazenamento por tempo indeterminado.

Resolução:

Como o material radioativo começa com o volume Q_o, e vai sendo descartado em um invólucro de volume, digamos, V, para V ser mínimo, o material descartado deve preencher completamente o volume do invólucro, ou seja:

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} D_n$$

Mas $\sum_{n=1}^{\infty} D_n = D_1 + D_2 + D_3 + \ldots = \frac{Q_o}{3} + \frac{Q_o}{3^2} + \ldots = \frac{Q_o}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right)$

$$\Rightarrow V = \frac{Q_o}{3} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}}\right) \Rightarrow \boxed{V = \frac{Q_o}{2}}$$

Entretanto, para encontrarmos as dimensões do invólucro de base x por x e comprimento y, para o qual a área lateral $(A\ell)$ ser mínima, devemos fazer:

$$\begin{Bmatrix} A_{\ell} = 2x^2 + 4xy \\ V = x^2 y \end{Bmatrix} \Rightarrow A\ell = 2x^2 + 4\frac{V}{x} \Rightarrow \frac{dA\ell}{dx} = 4x - \frac{4V}{x^2}$$

$A\ell$ será mínimo quando $\frac{dA\ell}{dx} = 0 \Rightarrow 4x - \frac{4v}{x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = V^{\frac{1}{3}} \\ y = \frac{V}{V^{\frac{2}{3}}} = V^{\frac{1}{3}} \end{cases}$

Colocando em função de Q_o : $x = y = \left(\frac{Q_o}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$