QUÍMICA

01. Considere reações de combustão do etanol.
a) Escreva a equação química balanceada para a reação com oxigênio puro.
b) Escreva a equação química balanceada para a reação com ar atmosférico.
c) Escreva a equação química balanceada para a reação com 50% da quantidade estequiométrica de ar atmosférico.
d) Classifique as reações dos itens a), b) e c) em ordem crescente de variação de entalpia reacional.

Resolução:

a) $C_2H_6O_{(\ell)} + 3O_{2(g)} \rightarrow 2CO_{2(g)} + 3H_2O_{(g)}$

b) Considerando o ar composto por 20% de $O_{2(g)}$ temos:

Logo, a equação balanceada fica:

$$C_2H_6O_{(\ell)} + 15\,ar_{(g)} \rightarrow 2CO_{2(g)} + 3H_2O_{(g)} + 12N_{2(g)}$$

(Consideramos os outros 80% do ar composto por $N_{2(g)}$)

c) Sem balancear ainda, temos:

$$C_2H_6O_{(\ell)} + O_{2(g)} \rightarrow C_{(s)} + CO_{(g)} + H_2O_{(g)}$$

Balanceando, temos:

$$C_2H_6O_{(\ell)} + \frac{3}{2}O_{2(g)} \rightarrow C_{(s)} + CO_{(g)} + 3H_2O_{(g)}$$

Lembrando que consideramos o ar composto por 20% de $O_{2(g)}$ e 80% de $N_{2(g)}$, temos, finalmente:

$$C_2H_6O_{(\ell)} + \frac{15}{2}ar_{(g)} \rightarrow C_{(s)} + CO_{(g)} + 3H_2O_{(g)} + 6N_{2(g)}$$

d) Dado que o nitrogênio do ar fica inerte, $\Delta H_a = \Delta H_b$.

Lembrando que a combustão completa libera mais energia que a incompleta, temos:

$$\boxed{/\Delta H_c/ < /\Delta H_b/ = /\Delta H_a/}$$

02. Uma determinada quantidade de um composto A foi misturada a uma quantidade molar três vezes maior de um composto B, ou seja, A + 3B. essa mistura foi submetida a dois experimentos de combustão (I e II) separadamente, observando-se:

I. A combustão dessa mistura A + 3B liberou 550 kJ de energia.
II. A combustão dessa mistura A + 3B, adicionada de um composto C em quantidade correspondente a 25% em mol do total da nova mistura, liberou 814 kJ de energia.

Considerando que os compostos A, B e C não reagem entre si, determinem os valores numéricos

a) da quantidade, em mol, de A, B e C.
b) do calor de combustão, em kJ mol^{-1}, do composto C, $\Delta H_c(C)$.

Dados: $\Delta H_c(A) = -700\ kJ\ mol^{-1}$; $\Delta H_c(B) = -500\ kJ\ mol^{-1}$.

Resolução:

Sejam n_A, n_B e n_C as quantidades dos compostos A, B e C, respectivamente. Temos:

a)
$n_A \cdot \Delta H_c(A) + n_B \cdot \Delta H_c(A) = -550$

Mas, $n_B = 3n_A$, então:

$- n_A\ 700 - 500 \cdot 3n_A = -550 \Rightarrow \boxed{n_A = 0{,}25mol}$

Assim, $\boxed{n_B = 0{,}75mol}$

Do experimento II:

$-550 + n_C \cdot \Delta H_c(C) = -814$

Mas,

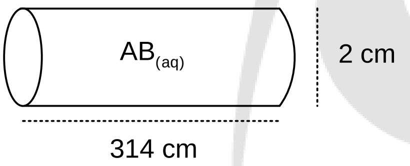
$$n_C = \frac{n_A + n_B + n_C}{4} \Rightarrow \boxed{n_C = \frac{1}{3} mol}$$

b)
Então,

$$\frac{\Delta H_c(C)}{3} = -264 \Rightarrow \boxed{\Delta H_c(C) = -792\, kJ / mol}$$

03. Considere uma porção de uma solução aquosa de um eletrólito genérico AB, em formato de um cilindro de 2 cm de diâmetro e 314 cm de comprimento, cuja concentração seja de $1{,}0 \times 10^{-2}$ mol L^{-1}. Sabendo que a resistência elétrica dessa porção é de $1{,}0 \times 10^{4}$ ohm, calcule a sua condutividade molar em S cm² mol^{-1}.

Resolução:



$AB = 10^{-2}\ mol / L$

$R = 1 \cdot 10^4 \Omega$

$$R = \rho \cdot \frac{L}{A} \therefore \rho = R \cdot \frac{A}{L}$$

$$\rho = \frac{1 \cdot 10^4 \Omega \cdot \cancel{\pi} \cdot 4\, cm^{\cancel{2}}}{\underbrace{\cancel{314}\ \cancel{cm}}_{100}} \therefore \rho = 4 \cdot 10^2 \Omega \cdot cm$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \therefore \frac{\sigma}{\ } = \frac{1}{\rho \cdot}$$

$$\frac{\sigma}{\ } = \frac{1}{4 \cdot 10^2 \Omega \cdot cm \cdot 10^{-5} mol / cm^3}$$

$$\frac{\sigma}{\ } = \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}\ \Omega\ mol / cm^2} \therefore \boxed{\frac{\sigma}{\ } = 2{,}5 \cdot 10^2\ S \cdot mol^{-1} \cdot cm^2}$$

04. Uma solução aquosa de água oxigenada 3% (v/v) foi adicionada a soluções aquosas ácidas em dois experimentos diferentes. Foram observados:

I. No primeiro experimento: A adição a uma solução aquosa ácida de permanganato de potássio resultou na perda da coloração da solução, tornando-a incolor.
II. No segundo experimento: A adição a uma solução aquosa ácida de iodeto de potássio inicialmente incolor resultou em uma solução de coloração castanha.

Com base nas observações experimentais, escreva as reações químicas balanceadas para cada experimento e indique os agentes oxidantes e redutores em cada caso, quando houver.

Resolução:

Experimento 1

$$2K\overset{+7}{Mn}O_4 + 5H_2\overset{-1}{O_2} + 6H^+ \rightarrow 2Mn^{2+} + 8H_2O + 5O_2^{\,0} + 2K^+$$

$$|\Delta| = 1x2 = 2é$$

$$|\Delta| = 5x1 = 5é$$

Agente Oxidante : $KMnO_4$
Agente Redutor : H_2O_2

Experimento 2

$$1H_2\overset{-1}{O_2} + 2K\overset{-1}{I} + 2H^+ \rightarrow 2H_2\overset{-2}{O} + 1\overset{0}{I_2} + 2K^+$$

$$|\Delta| = 1x2 = 2é$$

$$|\Delta| = 1x2 = 2é$$

Agente Oxidante : H_2O_2
Agente Redutor : KI

OBS: A aparição de uma coloração castanha se deve a formação do íon I_3^- devido a combinação do I^- presente com o I_2 formado $I_2 + I^- \rightarrow I_3^-$

OBS2: o desaparecimento da cor do experimento I deve-se ao consumo de $KMnO_4$ (violeta) e formação do Mn^{2+} (incolor).

05. Classifique cada uma das substâncias abaixo como óxidos ácido, básico ou anfótero.
a) SeO_2
b) N_2O_3
c) K_2O
d) BeO
e) BaO

Resolução:
a) Ácido: não-metal com nox elevado.
b) Ácido: não-metal com nox elevado.
c) Básico: metal com nox baixo.
d) Anfótero: metal com com característica anfótera.
e) Básico: metal com nox baixo.

Obs.: O óxido de berílio (BeO) é inerte a temperatura ambiente, mas reage com H_2SO_4 e outros ácidos fortes a elevadas temperaturas e soluções aquosas fortemente básicas.

Por isso, pode ser considerado óxido anfótero.

06. Considere a seguinte reação genérica, nas condições padrão e a 25°C:

$$2A^{3+} + 2B^{-} \rightleftharpoons 2A^{2+} + B_2$$

Determine a constante de equilíbrio dessa reação a 25°C, sabendo que os valores dos potenciais de eletrodo padrão de semicélula das espécies envolvidas são iguais a +0,15V e -0,15V.

Resolução:

O potencial de oxidação de B é o simétrico do seu potencial de redução, portanto,

$$\begin{array}{ll} 2A^{3+} + 2_{e^-} \rightarrow 2A^{2+} & E^o = +0{,}15V \\ 2B^{-} \rightarrow B_{2(g)} + 2_{e^-} & E^o = +0{,}15V \\ \hline 2A^{3+} + 2B^{-} \rightarrow B_{2(g)} + 2A^{2+} & E^o = 0{,}30V \end{array}$$

Usando a equação de Nernst

$$E = E^o - \frac{0{,}059}{n} \cdot \log Q$$

No equilíbrio, $E = 0,\ Q = K$

$$0 = E^o - \frac{0{,}059}{2} \cdot \log K$$

$$E^o = \frac{0{,}059}{2} \cdot \log K = 0{,}30$$

$$\log K = \frac{0{,}30 \cdot 2}{0{,}059} \approx 10 \therefore K \approx 10^{10}$$

07. Uma solução comercial de $HC\ell$ é vendida com 37% (em massa) de $HC\ell$ em água. A densidade dessa solução de $HC\ell$ é de 1,15g cm^{-3}.

a) Considerando que o $HC\ell$ se dissocia completamente, determine o pH dessa solução comercial.

b) O valor do pH determinado no item a) possui significado físico. Justifique.

Resolução:

a) $d_{HC\ell} = 1{,}15 g l cm^3$

$$1L \text{ de solução} = \begin{cases} 425{,}5g HCl \\ 724{,}5g H_2O \end{cases}$$

1150g

$$N_{HC\ell} = \frac{m}{M} = \frac{425{,}5}{1 + 35{,}5} = \frac{425{,}5}{36{,}5} \approx 11{,}66 mol$$

$$[H^+] = \frac{11{,}66 mol}{1L} = 11{,}66 mol / L$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log(11{,}66) \approx -1$$

b) Sim, o pH encontrado representa uma concentração muito elevada de íons hidrônio, isso reflete nas propriedades da solução. Por exemplo, se a pele humana for tocada por gotas dessa solução, o efeito sentido será de queimadura forte.

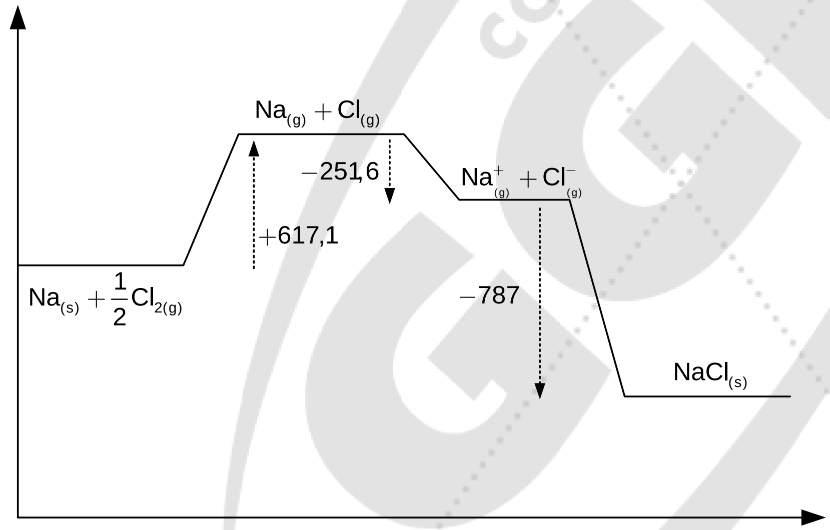
08. Considere as variações de entalpia de processo abaixo tabeladas.

Processo	**ΔH (kJ mol^{-1})**
Ionização do Na^0	495,8
Energia de ligação Cl - Cl	242,6
Entalpia de vaporização Na^0	97,4
Afinidade eletrônica do Cl	-349
Entalpia de rede do NaCl	-787

a) Esboce o diagrama de Born-Haber para formação do NaCl(s) a partir do Na^0(s) e Cl_2 (g) e calcule a variação de entalpia de formação do NaCl(s).
b) Sabe-se que o valor absoluto (em módulo) da entalpia de rede do CaO(s) é maior do que a do NaCl(s). Explique por quê.

Resolução:

a)



1ª etapa: vaporização de Na e quebra de ligação Cl_2

$Na_{(s)} \rightarrow Na_{(g)}\ \Delta H = +495,8\ kJ/mol$

$\frac{1}{2}Cl_{2_{(g)}} \rightarrow Cl_{(g)}\ \Delta H = +121,3\ kJ/mol$

Total: 617,1 kJ/mol

2ª etapa: energia de ionização e afinidade eletrônica

$Na_{(g)} \rightarrow Na^+_{(g)} + é\ \Delta H = +97,4\ kJ/mol$

$Cl^{+é}_{(g)} \rightarrow Cl^-_{(g)}\ \Delta H = -349\ kJ/mol$

Total: -251,6 kJ/mol

3ª etapa: energia de rede

$Na^+_{(g)} + Cl^-_{(g)} \rightarrow NaCl_{(s)}\ \Delta H = -787\ kJ/mol$

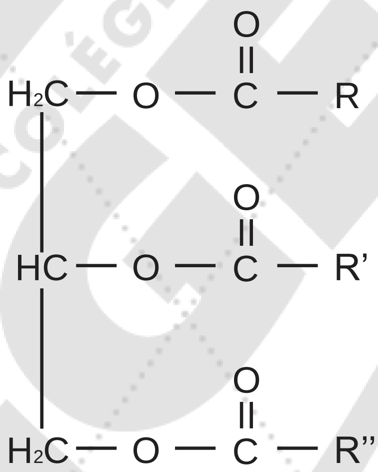
Somando todas as etapas: $\Delta H = 617,1 - 251,6 - 787 = -421,5\ kJ/mol$

b) No retículo cristalino do CaO os íons presentes apresentam duas cargas elétricas $(Ca^{2+}$ e $O^{2-})$, enquanto no retículo cristalino do NaCl, os íons apresentam apenas uma carga elétrica $(Na^{+}$ e $Cl^{-})$. Uma maior carga dos íons, em geral, acarreta uma maior atração eletrostática, conferindo uma maior coesão ao retículo, consequentemente um maior valor (em módulo) de energia de rede.

Um fator que também contribui para a maior coesão do CaO é o tamanho do íon O^{2-} em relação ao Cl^{-}. Como o O^{2-} é menor, sua densidade de carga é maior que a do Cl^{-}, gerando maior atração.

Como os íons Na^{+} e Ca^{2+} apresentam tamanhos próximos, não influenciam na coesão do retículo.

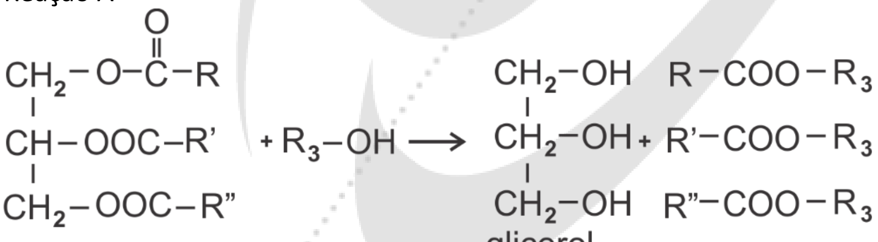
09. A figura abaixo mostra a estrutura básica de um triacilglicerídio, em que R, R' e R'' representam cadeias carbônicas, saturadas ou insaturadas, com pelo menos oito átomos de carbono. Sabe-se que o triacilglicerídio pode reagir tanto por transesterificação (reação A) quanto por hidrólise básica (reação B). Em ambos os casos, um produto comum dessas reações, pode ser usado na produção de nitroglicerina (reação C). Com base nessas informações, escreva as equações que descrevem as reações A, B e C.



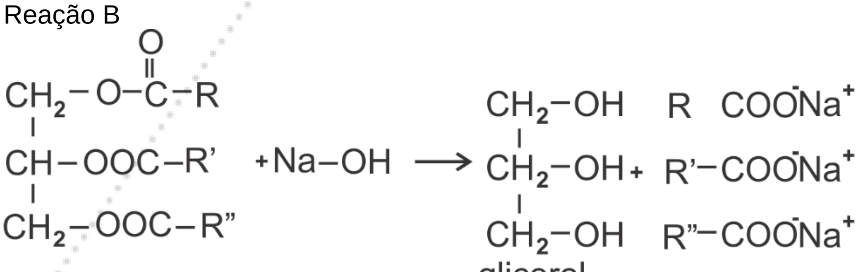
Resolução:

Reação de transesterificação:

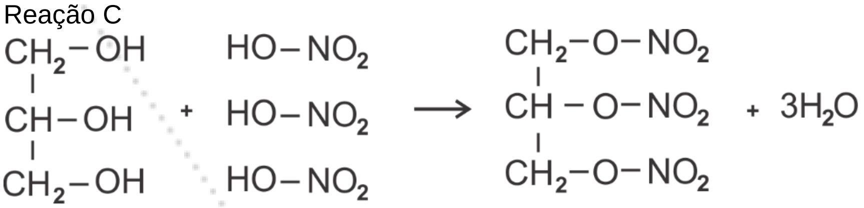
Reação A



Reação B



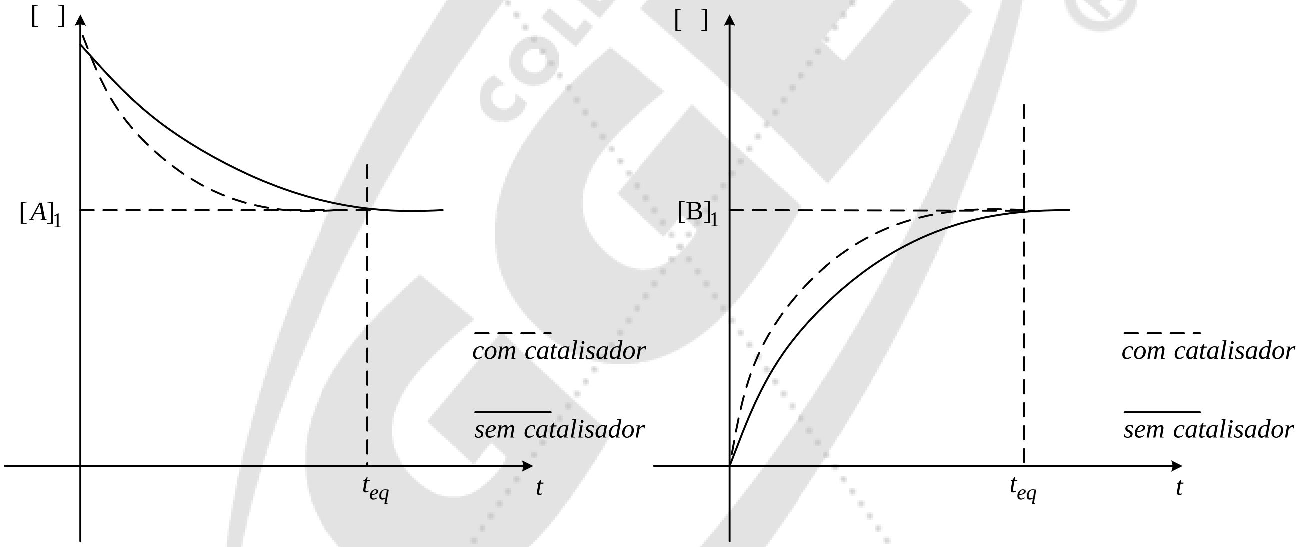
Reação C



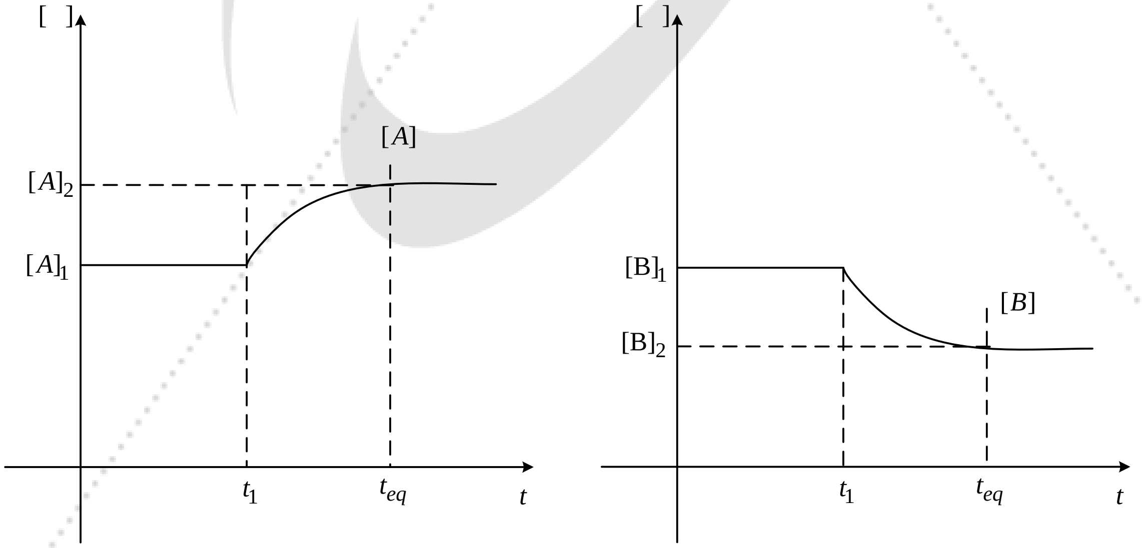
10. Considere a reação genérica $2A(g) \rightleftharpoons B(g)$. No instante inicial, apenas o reagente A está presente. Sabendo que a reação direta é exotérmica, construa os gráficos de concentração de cada substância em função do tempo de reação para as seguintes condições:

a) Desde o instante inicial até o equilíbrio, na presença e na ausência de catalisador.
b) A partir do equilíbrio inicial, com um rápido aumento na temperatura, até um novo equilíbrio.
c) A partir do equilíbrio inicial, com um rápido aumento na pressão, até um novo equilíbrio.
d) A partir do equilíbrio inicial, com a remoção rápida de 50% do produto B, até um novo equilíbrio.

Resolução:
a)

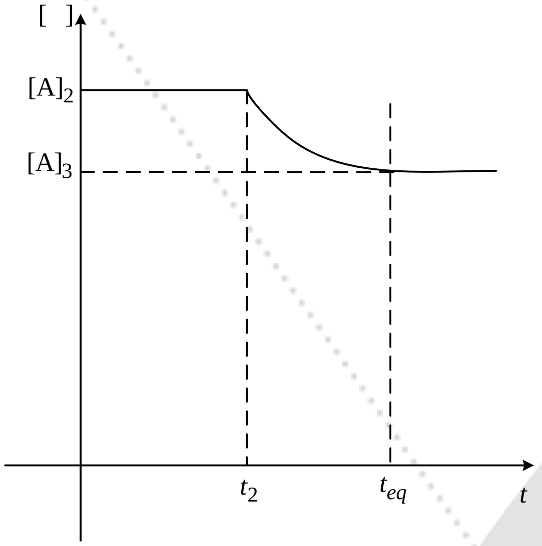


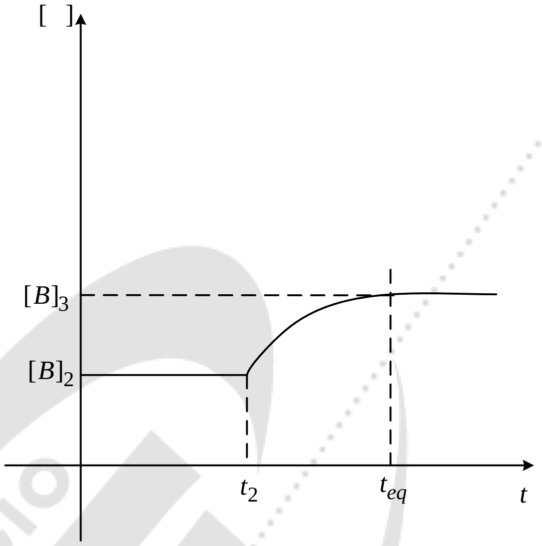
b)



O aumento de temperatura desloca para o sentido endotérmico.

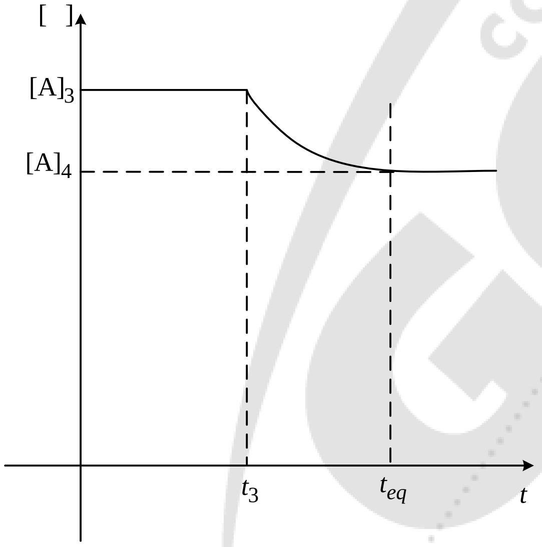
c)

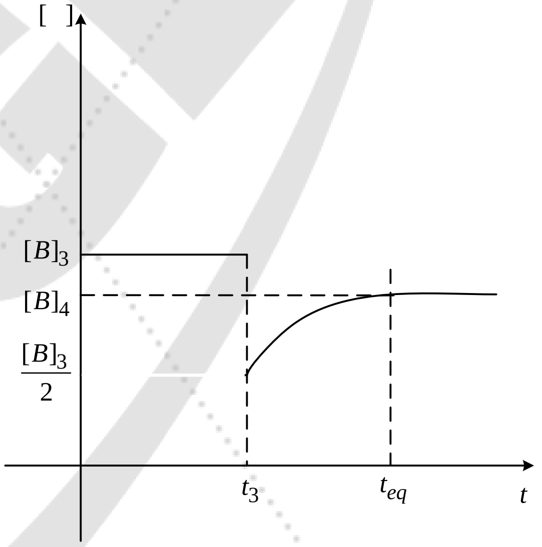




O aumento de pressão desloca o equilíbrio no sentido de menor número de mols de gás.

d)





Removendo produtos, há deslocamento no sentido dos produtos.

MATEMÁTICA

01. Determine os valores reais de a e b para os quais as equações $x^3 + ax^2 + 18 = 0$ e $x^3 + bx + 12 = 0$ possuam duas raízes em comum e, a seguir, determine essas raízes.

Resolução:

$$\begin{cases} P_1(x) = x^3 + ax^2 + 18 = 0; \text{raízes}: m, n, q \\ P_2(x) = x^3 + bx + 12 = 0; \text{raízes}: m, n, p \end{cases}$$

Sendo m e n as raízes repetidas, e p e q as distintas, podemos escrever
$P_1(x)\cdot(x-p) = P_2(x)\cdot(x-q)$
Que terá como raízes m, n, p e q.

$$\Rightarrow (x-p)\cdot(x^3+ax^2+18) \equiv (x-q)(x^3+bx+12)$$
$$\Rightarrow x^4+ax^3+18x-px^3-apx^2-18p \equiv x^4+bx^2+12x-qx^3-bqx-12q$$
$$\Rightarrow (a-p)x^3+(-ap)x^2+18x+(-18p) \equiv$$
$$(-q)x^3+(b)x^2+(12-bq)x+(-12q)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-p=-q \\ -ap=b \\ 18=12-bq \\ -18p=-12q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-p=-q \\ -ap=b \\ bq=-b \\ 3p=2q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=p-q \\ apq=6 \\ p=\dfrac{2}{3}q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=-3 \\ p=-2 \\ \boxed{\begin{matrix} a=1 \\ b=2 \end{matrix}} \end{cases}$$

Para descobrirmos as raízes m e n, basta dividir $P_1(x)$ por (x-q)=(x+3):

1	1	0	18	-3
	-3	6	-18	
1	-2	6	0	

Ou seja,

$$P_1(x) = (x+3)\cdot(x^2-2x+6)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{2-\sqrt{4-4\cdot 6}}{2} = 1-\sqrt{1-6} = \boxed{1-\sqrt{5}\,i} \\ n = \dfrac{2+\sqrt{4-4\cdot 6}}{2} = 1+\sqrt{1-6} = \boxed{1+\sqrt{5}\,i} \end{cases}$$

02. Determine todas as soluções da equação $sen^6 x + \cos^6 x = \dfrac{7}{12}$

Resolução:

Seja $a = sen^2 x$ e $b = \cos^2 x$. Logo $\begin{cases} a+b=1 \ (I) \\ a^3+b^3=\dfrac{7}{12} \ (II) \end{cases}$

$$= (a+b)^3 = \left(a^3+b^3\right) + 3ab(a+b) \overset{(II)}{\Rightarrow} 1 = \frac{7}{12} + 3ab$$

$$\Rightarrow 3ab = \frac{5}{12} \Rightarrow 36ab = 5 \overset{(I)}{\Rightarrow} 36a(1-a) = 5 \Rightarrow 36a^2 - 36a + 5 = 0$$

$$a = \frac{36 \pm \sqrt{36^2 - 4\cdot 5\cdot 36}}{2\cdot 36} = \frac{36 \pm \sqrt{36\cdot(36-20)}}{2\cdot 36} = \frac{1}{2} \pm \frac{6\cdot 4}{2\cdot 36} = \frac{1}{2} \pm \frac{4}{2\cdot 6}$$

$$a = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \Rightarrow a \in \left\{\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right\}$$

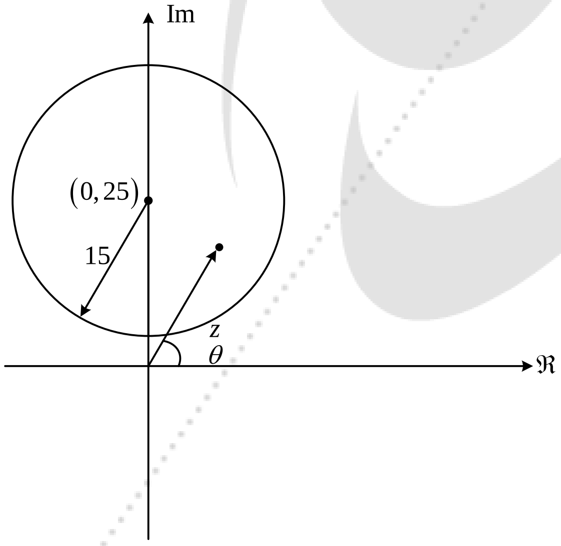
$$\text{i) Se } a = \frac{1}{6} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{6} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) \\ \text{ou} \\ x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{-\sqrt{6}}{6}\right) \end{cases}$$

$$\text{ii) Se } a = \frac{5}{6} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{5}{6} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\sqrt{\frac{5}{6}} = \pm\frac{\sqrt{30}}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{30}}{6}\right) \\ \text{ou} \\ x = \operatorname{arcsen}\left(+\frac{\sqrt{30}}{6}\right) \end{cases}$$

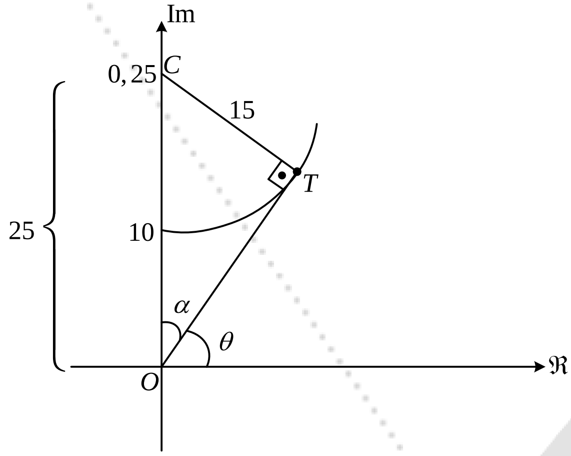
$$S = \left\{\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{6}}{6};\ \operatorname{arcsen}\left(\frac{-\sqrt{6}}{6}\right);\ \operatorname{arcsen}\left(\frac{-\sqrt{30}}{6}\right);\operatorname{arcsen}\left(\frac{+\sqrt{30}}{6}\right)\right\}$$

03. Determine o número complexo z de menor argumento que satisfaz |z – 25i| ≤ 15.

Resolução:
Note que graficamente temos que |z - 25i| ≤ 15 representa um círculo centrado em (0,25) e de raio 15.



O complexo de menor argumento (θ), então, é representado abaixo por OT:



Assim,

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta + \alpha = 90° \\ \alpha = arc\,sen\left(\frac{15}{25}\right) = arc\,sen\left(\frac{3}{5}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} sen\theta = sen(90° - \alpha) = \cos\alpha = \frac{4}{5} \\ \cos\theta = \cos(90° - \alpha) = sen\alpha = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Observando o triângulo OCT $\Rightarrow 25^2 = 15^2 + OT^2 \Rightarrow OT = 20 = |z|$

$\Rightarrow z = |z| \cdot (\cos\theta + i\,sen\theta) = 20 \cdot (3/5 + i\,4/5) \Rightarrow \boxed{z = 12 + 16i}$

04. Sabendo que x pertence ao intervalo fechado [1, 64], determine o maior valor da função

$$f(x) = (\log x)^4 + 12(\log x)^2 \cdot \log_2\left(\frac{8}{x}\right)$$

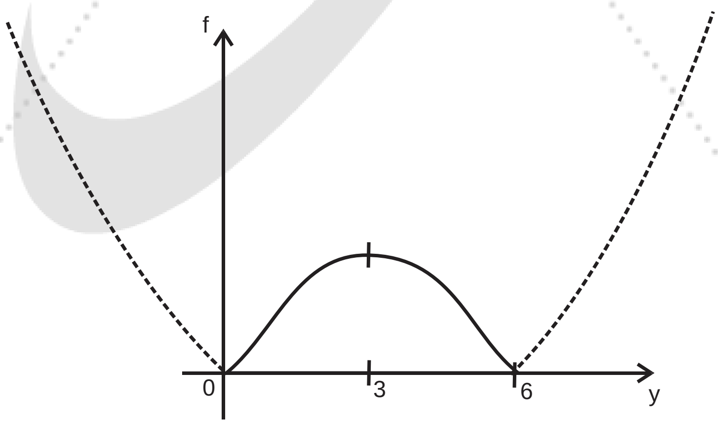
Resolução:

Note que se $\log_2 x = y$, então:

$$f(x) = y^4 + 12y^2 \cdot (\log_2 8 - \log_2 x) = y^4 + 12y^2 \cdot (3 - y)$$
$$f(x) = y^4 + 36y^2 - 12y^3 = y^2\,(y^2 + 36 - 12y)$$

$$f(y) = y^2\,(y^2 - 12y + 36) = y^2\,(y - 6)^2$$

Como $x \in [1, 64] \Rightarrow y \in [\log_2 1, \log_2 64] \Rightarrow y \in [0, 6]$, podemos então esboçar o gráfico de f(y):



Dada a simetria de f(y), pode-se afirmar que seu máximo ocorre para y=3 (ou $x = 2^3 = 8$) vale:

$$f(y = 3) = 3^2\,(3 - 6)^2 = 3^4 = 81$$

RESPOSTA: 81

05. Seja *F* o foco da parábola de equação $(y-5)^2 = 4(x-7)$, e sejam *A* e *B* os focos da elipse de equação $\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{8}=1$. Determine o lugar geométrico formado pelos pontos *P* do plano tais que a área do triângulo *ABP* seja numericamente igual ao dobro da distância de *P* a *F*.

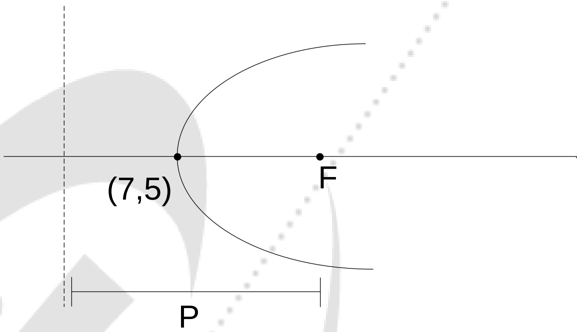
Resolução:

$(y-5)^2 = 4(x-7)$

$V(7,5)$

$2p = 4 \rightarrow p=2$

$F(8,5)$



$$\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{8}=1$$

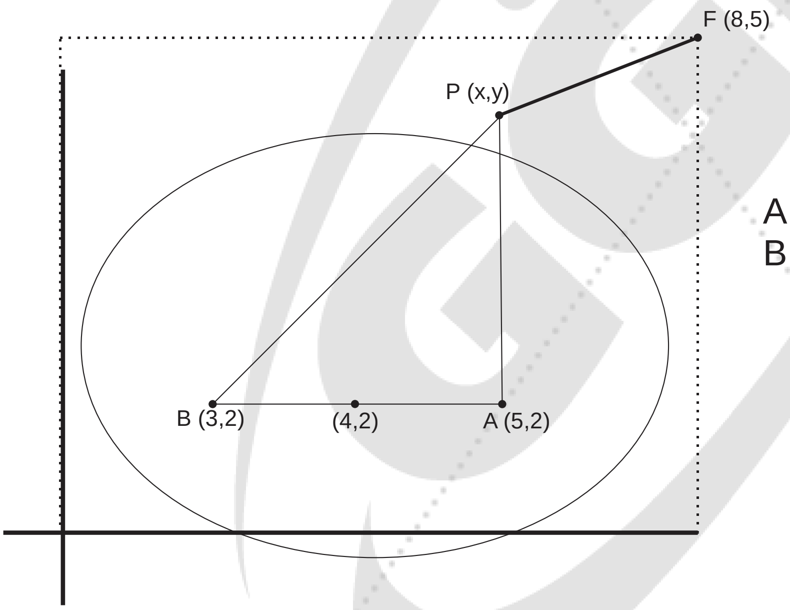
$a^2 = 9 \rightarrow a=3$

$b^2 = 8 \rightarrow b=2\sqrt{2}$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 9-8$

$c^2 = 1$

$c = 1$



A = (5,2) = foco 1
B = (3,2) = foco 2

$2\overline{PF} = S\Delta RBP$

$$2\cdot\sqrt{(x-8)^2+(y-5)^2} = \frac{1}{2}\,AB\cdot h = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\,(y-2)$$

elevando ao quadrado

$$4[(x-8)^2+(y-5)^2] = y^2-4y+4$$
$$4(x-8)^2+4(y^2-10y+25) = y^2-4y+4$$
$$4(x-8)^2+3y^2-36y+96=0$$
$$4(x-8)^2+3(y^2-12y+36)-12=0$$
$$4(x-8)^2+3(y-6)^2=12 \qquad \div 12$$

$$\frac{(x-8)}{3}+\frac{(y-6)^2}{4}=1$$

RESPOSTA: $\frac{(x-8)}{3}+\frac{(y-6)^2}{4}=1$

06. Sejam a, b e c três números reais em progressão aritmética crescente, satisfazendo

$$\cos a+\cos b+\cos c=0 \text{ e } \operatorname{sen} a+\operatorname{sen} b+\operatorname{sen} c=0.$$

Encontre a menor razão possível para essa progressão aritmética.

Resolução:

$$a=b-r$$
$$b$$
$$c=b+r$$

$$\begin{cases}\cos(b-r)+\cos b+\cos(b+r)=0\\ \operatorname{sen}(b-r)+\operatorname{sen} b+\operatorname{sen}(b+r)=0\end{cases}$$

Da 1ª equação:

$$\cos b\cos r+\cancel{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} r}+\cos b+\cos b\cos r-\cancel{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} r}=0$$

$$\begin{cases}\cos b=0\rightarrow b=\dfrac{n}{2}+k\pi\\ \text{OU}\\ 2\cos r+1=0\rightarrow 2\cos r=-1\rightarrow \cos r=\dfrac{-1}{2}\\ r=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi \quad , \quad \text{mas a PA é crescente} \Rightarrow r=+\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$$

Da 2ª equação:

$$\operatorname{sen} b\cos r-\operatorname{sen} r\cos b+\operatorname{sen} b+\operatorname{sen}\cos r+\operatorname{sen} r\cos b=0$$
$$\operatorname{sen} b\,(2\cos r+1)=0$$

$$\operatorname{sen} b=0 \quad \rightarrow \quad b=0+k\pi$$
$$2\cos r+1=0 \quad \rightarrow \text{análogo anterior} \rightarrow r=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$$

Logo a menor razão possível é $r=\dfrac{2\pi}{3}$.

OBS: Lembrar que cosb = 0 e senb = 0 não pode ocorrer simultaneamente, logo nas outras 3 possibilidades.

RESPOSTA: $r=\dfrac{2\pi}{3}$

07. Um número natural *n*, escrito na base 10, tem seis dígitos, sendo 2 o primeiro. Se movermos o dígito 2 da extrema esquerda para a extrema direita, sem alterar a ordem dos dígitos intermediários, o número resultante é três vezes o número original. Determine *n*.

Resolução:

2 e d c b a

$2 \cdot 10^5 + e \cdot 10^4 + d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a = h \quad (\text{I})$

$e \cdot 10^5 + d \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + a \cdot 10 + 2 = 3h \quad (\text{II})$

$$10 \cdot (\text{I}) \rightarrow 2 \cdot 10^6 + \underbrace{e \cdot 10^5 + d \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + a \times 10}_{3n-2} = 10n$$

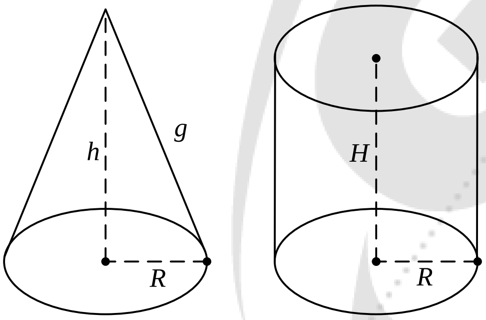
$$2 \cdot 10^6 + 3n - 2 = 10n$$

$$2 \cdot 10^6 - 2 = 7n$$

$$\boxed{\begin{array}{l} n = \dfrac{2 \cdot 10^6 - 2}{7} \\ n = 285.714 \end{array}}$$

08. Um cone circular reto, de altura *h*, e um cilindro circular reto têm bases de mesmo raio. O volume do cone é metade do volume do cilindro, e a área lateral do cone é igual à área lateral do cilindro. Determine, em função de *h*, o raio da esfera inscrita no cone.

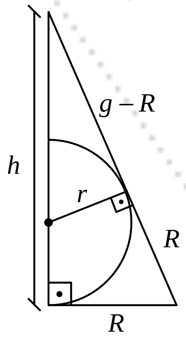
Resolução:



$V_{co} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ $\qquad$ $V_{ci} = \pi R^2 H$

- $V_{co} = \frac{1}{2} V_{ci} \Rightarrow \frac{1}{3} \cancel{\pi} \cancel{R^2} h = \frac{1}{2} \cancel{\pi} \cancel{R^2} H \Rightarrow \boxed{H = \frac{2}{3} h}$
- $AL_{co} = AL_{ci} \Rightarrow \cancel{\pi} \cancel{R} g = 2 \cancel{\pi} \cancel{R} H \Rightarrow g = 2 \cdot \frac{2}{3} h \Rightarrow \boxed{g = \frac{4}{3} h}$
- $R^2 = g^2 - h^2 = \frac{7h^2}{9} \Rightarrow \boxed{R = h \frac{\sqrt{7}}{3}}$

Por semelhança:



$$\frac{r}{R}=\frac{g-R}{h}\Rightarrow r=\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}h-h\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\Rightarrow \boxed{r=\left(\frac{4\sqrt{7}-7}{9}\right)h}$$

09. Sejam A, B, C os vértices de um triângulo. Determine $sen\hat{B}$ sabendo que

$$sen\left(\hat{A}+\hat{B}\right)=\frac{4}{5}=sen\left(\hat{A}-\hat{C}\right)$$

Resolução:

$$\begin{cases} sen(A+B)=\dfrac{4}{5} \\ sen(A-C)=\dfrac{4}{5} \\ A+B+C=180^o \end{cases}$$

$$\begin{cases} sen(180^o-C)=senC=\dfrac{4}{5}\ (I) \\ sen(A-C)=\dfrac{4}{5}\ (II) \end{cases}$$

De,I, $sen^2C=\frac{16}{25}\Rightarrow 1-cos^2C=\frac{16}{25}\Rightarrow cos^2C=\frac{9}{25}\Rightarrow |cosC|=\frac{3}{5}$. Analisemos o sinal de $cosC$:

I)Se $C>90^o\Rightarrow cosC=\frac{-3}{5}$

$sen(A-C)=senA\,cosC-senC\,cosA=senA\left(\frac{-3}{5}\right)-cosA\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{4}{5}$

$3senA+4cosA=-4$, que é absurdo pois se $C>90^o\Rightarrow A<90^o$

$senA>0$ e $cosA>0\Rightarrow -3senA+4cosA>0\Rightarrow$ absurdo!

II) Se $C > 90^o \Rightarrow \cos C = \frac{3}{5}$

$$\operatorname{sen}(A - C) = \operatorname{sen}A\cos C - \operatorname{sen}C\cos A = \operatorname{sen}A\left(\frac{3}{5}\right) - \left(\frac{4}{5}\right)\cos A = \frac{4}{5}$$

$$3\operatorname{sen}A + 4\cos A = 4 \quad \Rightarrow \quad 3\operatorname{sen}A = 4\,(1 + \cos A) \Rightarrow$$

$$9\operatorname{sen}^2 A = 16\,(1 + 2\cos A + \cos^2 A) \Rightarrow 9(1 - \cos^2 A) = 16 + 32\cos A + 16\cos^2 A$$

$$25\cos^2 A + 32\cos A + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos A = \frac{-32 \pm \sqrt{32^2 - 4 \cdot 25 \cdot 7}}{2 \cdot 25} = \frac{-32 \pm \sqrt{324}}{50}$$

$$\cos A = \frac{-32 \pm 18}{50} \quad \Rightarrow \quad \cos A = -1 \text{ (absurdo, pois } A, B \text{ e } C \text{ são ângulos de um triângulo)}$$

ou

$$\cos A = \frac{-7}{25} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}A = \frac{24}{25}$$

Como

$$B = 180^o - (A + C) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}B = \operatorname{sen}(180^o - (A + C))$$

$$\operatorname{sen}B = \operatorname{sen}A + C = \operatorname{sen}A\cos C + \operatorname{sen}C\cos A$$

$$\operatorname{sen}B = \frac{24}{25} \cdot \frac{3}{5} + \left(\frac{-7}{25}\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{44}{125}$$

10. Escolhem-se aleatoriamente três números distintos no conjunto {1, 2, 3,.....29, 30}. Determine a probabilidade da soma desses três números ser divisível por 3.

Resolução:

$$X = \{1, 2, 3, \ldots, 30\} = X_0 \cup X_1 \cup X_2$$
$$X_0 = \{n \in X \mid n = 3q\} \quad \# X_0 = 10$$
$$X_1 = \{n \in X \mid n = 3q + 1\} \quad \# X_1 = 10$$
$$X_2 = \{n \in X \mid n = 3q + 2\} \quad \# X_2 = 10$$

1º caso:
os três números em um mesmo conjunto

$$P = \frac{3 \cdot C_{10,3}}{C_{30,3}} = \frac{3 \cdot \frac{10 \cdot 9^3 \cdot 8}{3 \cdot 2}}{\frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2}} = \frac{72}{812}$$

2º caso:
Cada elemento em um X_i

$$P(E) = 1 \cdot \frac{20}{29} \cdot \frac{10}{28} = \frac{200}{812}$$

Pois o primeiro número pode estar em qualquer subconjunto X_i

O segundo tem que estar em um $X_j \quad (j \neq i)$

E o terceiro em $X_h \quad (h \neq i, h \neq j)$

$$\frac{72}{812} + \frac{200}{812} = \frac{272}{812} = \frac{68}{203}$$