GGE RESPONDE
MATEMÁTICA
IME 2019 (2ª FASE)

01.

Um jogo de dominó possui 28 peças com duas pontas numeradas de zero a seis, independentemente, de modo que cada peça seja única, conforme ilustra a Figura 1.
O jogo se desenrola da seguinte forma:

1. Quatro jogadores se posicionam nos lados de uma mesa quadrada.
2. No início do jogo, cada jogador recebe um conjunto de 7 peças de forma aleatória, de modo que somente o detentor das peças possa ver seu conteúdo.
3. As ações ocorrem por turnos no sentido anti-horário.
4. O jogador com a peça 6|6 coloca-a sobre a mesa e em seguida cada jogador, na sua vez, executa uma de duas ações possíveis:

a) Adiciona uma de suas peças de forma adjacente a uma das duas extremidades livres do jogo na mesa, de modo que as peças sejam encaixadas com pontas de mesmo valor.
b) Passa a vez, caso não possua nenhuma peça com ponta igual a uma das extremidades livres da mesa.

5. Vence o jogo o primeiro jogador que ficar sem peças na mão.

No jogo da Figura 2, é a sua vez de jogar e você constatou que o jogador à sua direita não possui peças com ponta 5 e o jogador à sua frente não possui peças com ponta 0. Você analisou todas as possíveis configurações de peças que os jogadores podem ter em suas mãos e decidiu jogar de modo a garantir que uma das pontas livres da mesa só possa ser usada por uma peça de sua posse, e que esta será a sua última peça em mão. Ao utilizar essa estratégia:

a) Quantas configurações de peças nas mãos dos jogadores garantem a vitória do jogo a você?

b) Esta quantidade corresponde a qual percentual do total de configurações possíveis?

Observação:
- A ordem das peças na mão de um jogador não importa.

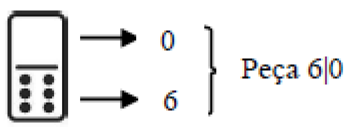


Figura 1

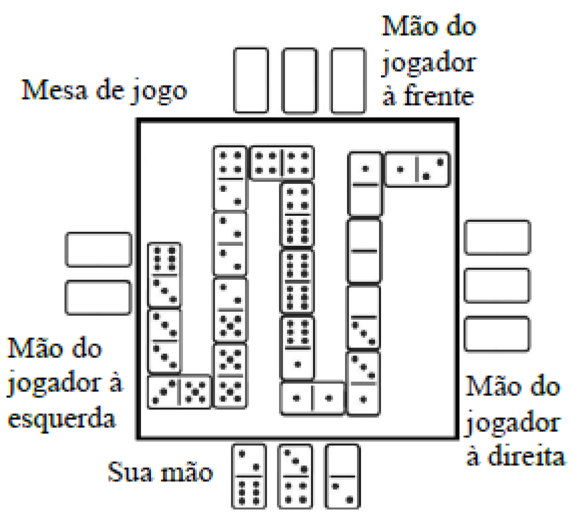


Figura 2

Resolução:

Falta saber com quem estão as 8 peças restantes

65	54		32
	51	41	
60	50	40	

Os números que tem a menor frequência são 2 e 3 aparecendo uma única vez em todas as peças dos oponentes.

Distribuição de frequência dos números

0	1	2	3	4	5	6
3	2	1	1	3	4	2

Logo a peça 3 2 é a peça chave para vencer a partida, pois com a peça 3 | 4 ou 2 | 0 vence a partida.

<u>**1ª SITUAÇÃO**</u>: Jogador a esquerda não tem a peça 3 | 2

<u>Jogador à direita</u> tem peças 3 2 e 4 1
Possibilidade de peças restantes 2 (pois não tem peça ponta 5)

<u>Jogador à frente</u> 1 (pois não tem peça ponta 0)
Assim são 2x1 = **2 possibilidades**

<u>Jogador à direita</u> tem peça 3 2 e não tem 4 1
Possibilidade de peças restantes 1 (pois não tem peça ponta 5)

<u>Jogador à frente</u> $C_{4,3} = 4$ (pois não tem peça ponta 0)
Assim são 1x4 = **4 possibilidades**

<u>Jogador à direita</u> não tem peça 3 2
Possibilidades = 1

<u>Jogador à frente</u> tem peça 3 2
Possibilidades de peças restantes $C_{3,2} = 3$ (pois não tem peça ponta 0)
Assim são 1x3 = **3 possiblidades**

Nessas 9 possibilidades, eu sou sempre vencedor.

Pois:

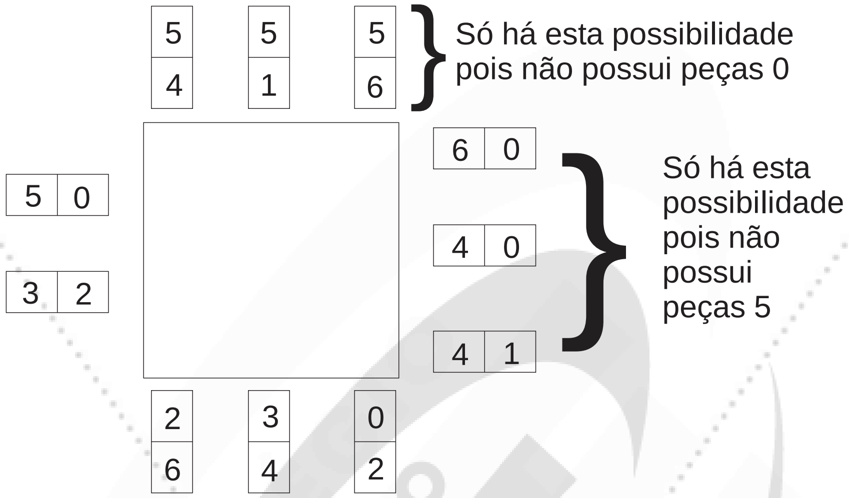
	eu	jogador à direita	jogador à frente	jogador à esquerda
1ª jogada	6 | 2 →	2 3 →	passa →	passa
		ou passa →	2 3 →	passa
2ª jogada	2 0 ou 4 3 →	não importa →	não importa →	não importa
3ª jogada	4 3 ou 2 0			

Na ponta 3 e venço!

2ª SITUAÇÃO:

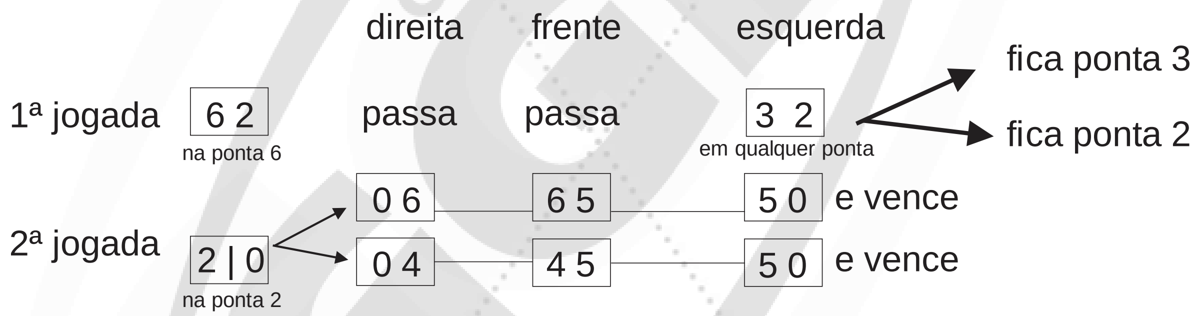
Jogador a esquerda tem a peça $\boxed{3\ 2}$

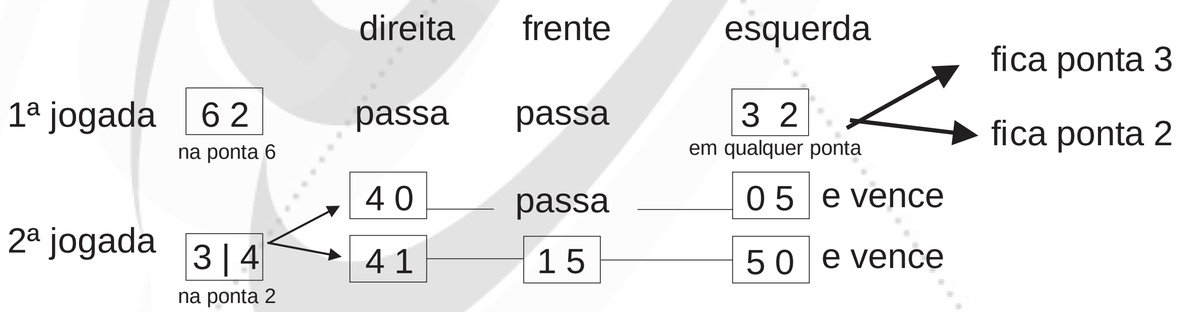
Nessa situação só pode haver uma configuração de peças restantes:



Se o jogador à direita não tem peça com ponta 5 e se há 4 peças com ponta 5, elas pertencem ao jogador da frente 1 peça ao jogador à esquerda. Como o jogador da frente não tem ponta 0, então a peça **50** pertence ao jogador à esquerda.

Nessa configuração, quaisquer jogadas que fizer com as peças o jogador à esquerda sempre vence.





a) 9 possibilidades

b) $\frac{9}{10}$ OU 90%

02. Definimos a função f: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(2n) = f(n), \quad n \geq 1 \\ f(2n+1) = f(n) + 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Determine $f(f(2019))$.

Observação: $\lfloor k \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a k.

Resolução:

$$f(2019) = f(1009) + 2^{\lfloor \log_2 1009 \rfloor} = 288 + 2^9 = 288 + 512 = 800$$
$$f(1009) = f(504) + 2^{\lfloor \log_2 504 \rfloor} = 32 + 2^8 = 32 + 256 = 288$$
$$f(504) = f(252) = f(126) = f(63) = 32$$
$$f(63) = f(31) + 2^{\lfloor \log_2 31 \rfloor} = 16 + 2^4 = 32$$
$$f(31) = f(15) + 2^{\lfloor \log_2 15 \rfloor} = 8 + 2^3 = 16$$
$$f(15) = f(7) + 2^{\lfloor \log_2 7 \rfloor} = 4 + 2^2 = 8$$
$$f(7) = f(3) + 2^{\lfloor \log_2 3 \rfloor} = 2 + 2^1 = 4$$
$$f(3) = f(1) + 2^{\lfloor \log_2 1 \rfloor} = 1 + 2^0 = 2$$

$$f(2019) = 800$$
$$f(f(2019)) = f(800)$$
$$f(800) = f(400) = f(200) = f(100) = f(50) = f(25)$$
$$f(25) = f(12) + 2^{\lfloor \log_2 12 \rfloor} = 2 + 2^3 = 10$$
$$f(12) = f(6) = f(3) = f(1) + 2^{\lfloor \log_2 1 \rfloor} = 1 + 2^0 = 2$$

$$\boxed{f(f(2019)) = f(800) = f(25) = 10}$$

03. Dadas as funções definidas nos reais $\mathbb{R}$:

$f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = \text{sen}(x)$, $f_3(x) = \cos(x)$, $f_4(x) = \text{sen}(2x)$ e $f_5(x) = e^{-x}$.

Mostre que existe uma única solução a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 tal que:

$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) + a_4 f_4(x) + a_5 f_5(x)$ seja função constante nula, onde $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$.

Resolução:

Para que a combinação linear das funções sejam a função constante nula, temos, para qualquer x e $\mathbb{R}$:

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) + a_4 f_4(x) + a_5 f_5(x) = 0$$

Temos, então, a seguinte tabela:

x	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0	1	0	1	0	1
$\frac{\pi}{2}$	$e^{\frac{\pi}{2}}$	1	0	0	$e^{\frac{-\pi}{2}}$
π	e^{π}	0	-1	0	$e^{-\pi}$
$\frac{\pi}{4}$	$e^{\frac{\pi}{4}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$e^{\frac{-\pi}{4}}$
2π	$e^{2\pi}$	0	1	0	$e^{-2\pi}$

Ou seja, substituindo os valores de x indicados na tabela, temos o seguinte sistema linear homogêneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e^{\frac{\pi}{2}} & 1 & 0 & 0 & e^{\frac{-\pi}{2}} \\ e^{\pi} & 0 & -1 & 0 & e^{-\pi} \\ e^{\frac{\pi}{4}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & e^{\frac{-\pi}{4}} \\ e^{2\pi} & 0 & 1 & 0 & e^{-2\pi} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para sabermos a quantidade de soluções do sistema, calculamos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e^{\frac{\pi}{2}} & 1 & 0 & 0 & e^{\frac{-\pi}{2}} \\ e^{\pi} & 0 & -1 & 0 & e^{-\pi} \\ e^{\frac{\pi}{4}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & e^{\frac{-\pi}{4}} \\ e^{2\pi} & 0 & 1 & 0 & e^{-2\pi} \end{vmatrix}$$

Por Laplace:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ e^{\frac{\pi}{2}} & 1 & 0 & e^{\frac{-\pi}{2}} \\ e^{\pi} & 0 & -1 & e^{-\pi} \\ e^{2\pi} & 0 & 1 & e^{-2\pi} \end{vmatrix}$$

Novamente:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{\pi} & -1 & e^{-\pi} \\ e^{2\pi} & 1 & e^{-2\pi} \end{vmatrix} = 2(e^{\pi} - e^{-\pi}) + (e^{2\pi} - e^{-2\pi}) > 0$$

Como $\Delta \neq 0$, o sistema é possível determinado.

Sendo um sistema linear homogêneo, a solução única é a trivial:

$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (0,0,0,0,0)$

04. Seja Z um número complexo tal que $\frac{2Z}{\overline{Z}i}$ possui argumento igual a $\frac{3\pi}{4}$ e $\log_3\left(2Z + 2\overline{Z}i + 1\right) = 2$. Determine o número complexo Z.

Solução:

Seja $z = a + bi$, com $a, b \in \Re$.

De $\log_3\left(2z + 2\overline{z} + 1\right) = 2$, temos:

$$2z + 2\overline{z} + 1 = 9$$
$$2\left(a + bi\right) + 2\left(a - bi\right) = 8$$
$$2a + 2bi + 2a - 2bi = 8$$
$$4a = 8$$
$$\boxed{a = 2}$$

Segue que $z = 2 + bi$, com $b \in \Re$

Calculando $\frac{2z}{\overline{z}i}$, temos:

$$\frac{2z}{\overline{z} \cdot i} = \frac{2\left(2 + bi\right)}{\left(2 - bi\right)i}$$
$$= \frac{4 + 2bi}{b + 2i}$$
$$= \frac{4 + 2bi}{b + 2i} \cdot \frac{b - 2i}{b - 2i}$$
$$= \frac{4b - 8i + 2b^2 i + 4b}{b^2 + 4}$$
$$= \left(\frac{8b}{b^2 + 4}\right) + \left(\frac{2b^2 - 8}{b^2 + 4}\right)i$$

com $\frac{2b^2 - 8}{b^2 + 4} > 0$, já que $\arg\left(\frac{2z}{\overline{z}i}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

Daí $|b| > 2$

Assim, temos:

$$\arg\left(\frac{2z}{\overline{z}i}\right) = \text{arctg}\left(\frac{2b^2-8}{8b}\right) = \text{arctg}\left(\frac{b}{4}-\frac{1}{b}\right)$$

Por outro lado, sabemos que $\arg\left(\frac{2z}{\overline{z}i}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

Segue que:

$$\frac{b}{4}-\frac{1}{b} = -1$$

$$b^2-4=-4b$$

$$b^2+4b-4=0$$

$$b=\frac{-4\pm 4\sqrt{2}}{2}$$

$$b' = -2+2\sqrt{2} = 2\left(\sqrt{2}-1\right)(\text{não convém, pois } |b|>2)$$

$$b'' = -2-2\sqrt{2} = -2\left(\sqrt{2}+1\right)$$

Logo:

$$z = 2-2\left(\sqrt{2}+1\right)i$$

05. Mostre que os números 16, 24 e 81 podem pertencer a uma PG e obtenha a quantidade de termos dessa PG, sabendo que seus elementos são números naturais.

Resolução:

Se temos uma PG, de razão q:

$16q^r = 24$ e $16q^s = 81$, com r e s inteiros

Então, $q^r = \frac{3}{2}$ e $q^s = \left(\frac{3}{2}\right)^4$

Para que a PG seja composta por naturais, q é racional, e assim:

$q=\frac{3}{2}$; $r=1$; $s=4$.

Logo, a PG é:

$$\underbrace{16, 24, 36, 54, 81}_{5 \text{ termos}}$$

06. Seja o polinômio $q(x) = x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x + 25 + k$ que possui valor mínimo igual a -64, onde k é uma constante real. Determine as raízes de $q(x)$.

Resolução:

Para encontrar pontos de mínimo local na função polinomial de grau 4, precisamos ter:

$$q^{I}(x)=0 \text{ e } q^{II}(x)>0$$

Daí,

$$q^{I}(x)=4x^3-24x^2+12x+40 \quad \text{e} \quad q^{II}(x)=12x^2-48x+12$$

Assim,

$$4x^3-24x^2+12x+40=0 \text{ (I)} \quad \text{e} \quad 12x^2-48x+12>0 \text{ (II)}$$

Resolvendo (I)

$$x^3-6x^2+3x+10=0$$

Por inspeção, vemos que $x_1=-1$ é raiz, e podemos então fatorar a expressão:

$$(x+1)\ (x^2-7x+10)=0$$

Onde concluímos que as outras raízes são:

$$x_2=2 \text{ e } x_3=5$$

Testando os resultados em (II)

$$q^{II}(x_1) = 72>0 \text{ (OK!)}$$
$$q^{II}(x_2) = -36<0 \text{ (Ponto de máximo)}$$
$$q^{II}(x_3) = 72>0 \text{ (OK!)}$$

Logo, $x_1=-1$ e $x_3=5$ são coordenadas de mínimo local. Para determinar o mínimo global, precisamos verificar ambas situações.

Então,

$$q(x_1) = K \quad \text{e} \quad q(x_3)=K$$

Verificamos que ambos os pontos são de mínimo global, então podemos dizer que K = - 64 e ainda podemos notar que a reta x = 2 é eixo de simetria da função. Assim, conseguimos escrever:

$$q(x)= x^4+8x^3+6x^2+40x-39$$

E reescrever:

$$q(x)=(x-2)^4-18(x-2)^2+17$$

Daí, resolvendo a equação biquadrada:

$$(x-2)^2=17 \text{ ou } (x-2)^2=1$$

Finalmente, temos as raízes da equação de q(x) = 0:

$\boxed{x=2+\sqrt{17}}$ ou $\boxed{x=2-\sqrt{17}}$ ou $\boxed{x=3}$ ou $\boxed{x=1}$

07. Determine todas as soluções da equação:

$$4\operatorname{sen}^2(7x)\cdot\cos(2x)+2\operatorname{sen}(9x)+8\operatorname{sen}^2(x)+5\cos(2x)+2\operatorname{sen}(5x)=4$$

No intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Resolução:

Reorganizando,

$$4\operatorname{sen}^2(7x)\cdot\cos(2x)+2\cdot\left(\operatorname{sen}(9x)+\operatorname{sen}(5x)\right)+5\cos(2x)=4-8\operatorname{sen}^2(x)$$

$$4\operatorname{sen}^2(7x)\cos(2x)+4\operatorname{sen}(7x)\cos(2x)+5\cos(2x)=4\cos(2x)$$

$$4\operatorname{sen}^2(7x)\cos(2x)+4\operatorname{sen}(7x)\cos(2x)+\cos(2x)=0$$

Então, $\cos(2x)=0$ ou:

$$4\operatorname{sen}^2(7x)+4\operatorname{sen}(7x)+1=0\rightarrow\operatorname{sen}(7x)=\frac{-1}{2}$$

$$2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ ou } 7x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } 7x=\frac{-\pi}{6}+2k\pi;\ k\in Z$$

Finalmente,

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \text{ ou } x=\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{2\pi}{7} \text{ ou } x=\frac{-\pi}{42}+k\cdot\frac{2\pi}{7}$$

Se $x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$, então:

$$x=\frac{7\pi}{4} \text{ ou } x=\frac{67\pi}{42} \text{ ou } x=\frac{79\pi}{42} \text{ ou } x=\frac{71\pi}{42} \text{ ou } x=\frac{83\pi}{42}$$

08. A reta r é normal à cônica C, de equação $9x^2-4y^2=36$, no ponto $A=\left(3,\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ e intercepta o eixo das abscissas no ponto B. Sabendo que F é o foco da cônica C mais próximo ao ponto A, determine a área do triângulo ABF.

Resolução:

$$9X^2-4Y^2=36\Rightarrow\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{9}=1\Rightarrow\left.\begin{matrix}a^2=4\\b^2=9\end{matrix}\right\}c^2=a^2+b^2$$

$$c^2=13$$

$$c=\sqrt{13}$$

$$F(\sqrt{13},0)$$

$$F'(-\sqrt{13},0)$$

Reta tangente no ponto A $\left(3,\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$

$$9X_0X-4Y_0Y=36$$

$$9\cdot3\cdot X-4\cdot3\frac{\sqrt{5}}{2}Y=36$$

$$27X-6\sqrt{5}Y=36$$

$$6\sqrt{5}Y=27X-36$$

$$Y=\frac{27}{6\sqrt{5}}X-\frac{36}{6\sqrt{5}}$$

$$\text{reta normal } m=-\frac{6\sqrt{5}}{27}$$

$Y = -\frac{6\sqrt{5}}{27}X + K$, mas $\left(3, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right) \in$ à reta

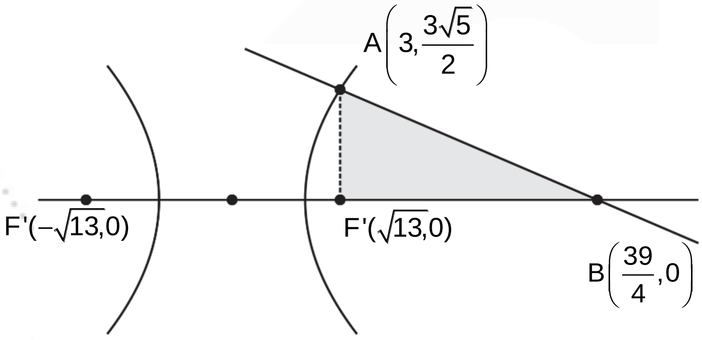
$$\frac{3\sqrt{5}}{2} = -\frac{^{2}\cancel{6}\sqrt{5}}{\cancel{27}_{\cancel{9}\,3}} \cdot \cancel{3} + K \rightarrow K = \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{2\sqrt{5}}{3} = \frac{9\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{6} = \frac{13\sqrt{5}}{6}$$

$\therefore Y = -\frac{6\sqrt{5}}{27}X + \frac{13\sqrt{5}}{6}$ nas abcissas $\Rightarrow Y_B = 0$

$$\therefore \frac{6\sqrt{\cancel{5}}}{27}X = \frac{13\sqrt{\cancel{5}}}{6} \Rightarrow X_B = \frac{^{3}\cancel{9}\ \cancel{27} \cdot 13}{\cancel{6}_2 \cdot \cancel{6}_2} \rightarrow X = \frac{39}{4}$$

$\therefore B\left(\frac{39}{4}, 0\right)$

$A\left(3, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$



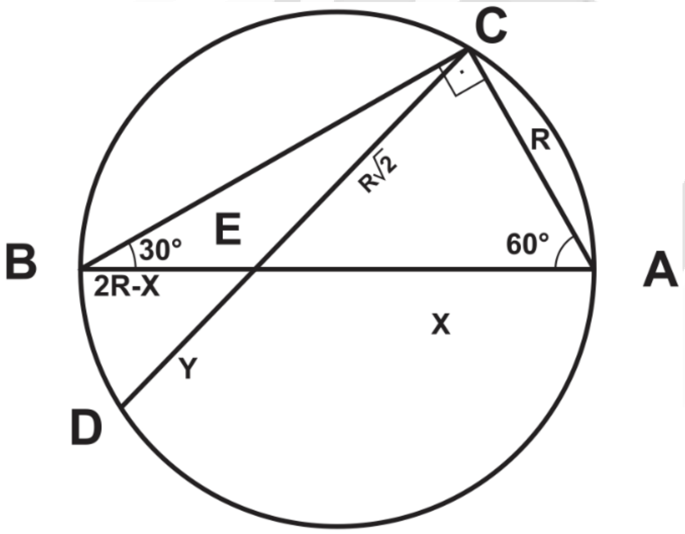
$$S\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{39}{4} - \sqrt{13}\right) \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$S\Delta = \left(\frac{39-4\sqrt{13}}{8}\right) \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{S\Delta = \left(39-4\sqrt{13}\right) \cdot \frac{3\sqrt{5}}{16}}$$

09. Uma corda CD corta o diâmetro AB de um círculo de raio R no ponto E. Sabendo que o ângulo $A\hat{B}C = 30º$ e que $\overline{EC} = R\sqrt{2}$, calcule a medida do segmento $\overline{ED}$.

Resolução:



Sejam $EA = X$ e $ED = Y$

Pela lei dos cossenos no triângulo AEC:

$(R\sqrt{2})^2 = R^2 + X^2 - 2RX \cdot \cos 60°$

$\Rightarrow 2R^2 = R^2 + x^2 - RX$

$\Rightarrow X^2 - RX - R^2 = 0$

$\Rightarrow X = \dfrac{R + R\sqrt{5}}{2} = \dfrac{R(1+\sqrt{5}}{2}$

usando relação entre cordas temos:

$R\sqrt{2} \cdot Y = X(2R - X) = 2RX - X^2$

$= R^2(1+\sqrt{5}) - R^2\dfrac{(6+2\sqrt{5})}{4}$

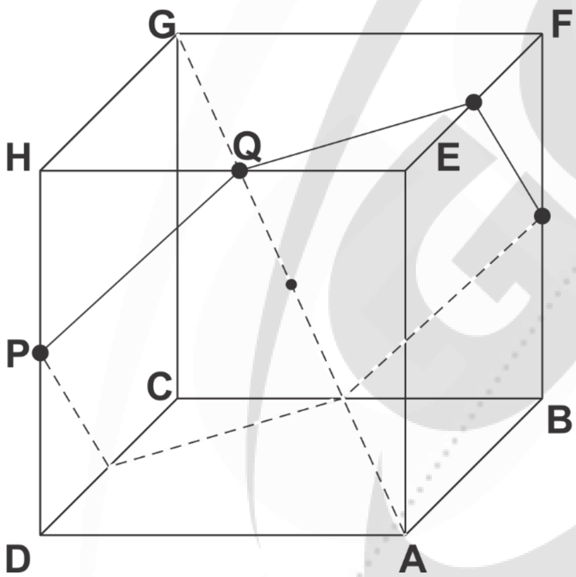
$\Rightarrow \sqrt{2}Y = \dfrac{R(2+2\sqrt{5}-3-\sqrt{5})}{2} = \dfrac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$

$\Rightarrow Y = \dfrac{R(\sqrt{10}-\sqrt{2})}{4}$

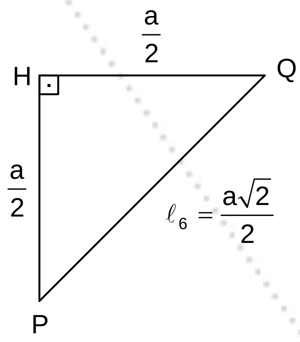
10. Um cubo com diagonal principal $\overline{AG}$ é interceptado pelo plano α, perpendicular à $\overline{AG}$, formando uma seção hexagonal regular. Calcule, em função da aresta a do cubo:

a) o apótema dessa seção hexagonal;
b) o raio da esfera que é tangente a essa seção e às faces do cubo que contém o vértice A.

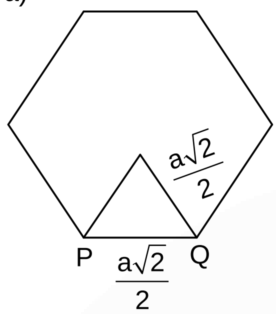
Resolução:



Para que a seção no plano α seja um hexágono, tal seção deve cortar as (seis) arestas a seguir: EF, FB, BC, CD, DH e HE. Para este hexágono ser regular, os pontos de interseção devem ser as pontos médios dessas arestas, que por sua vez são equidistantes dos vértices A e G, ou seja, α é o plano mediador da diagonal AG.



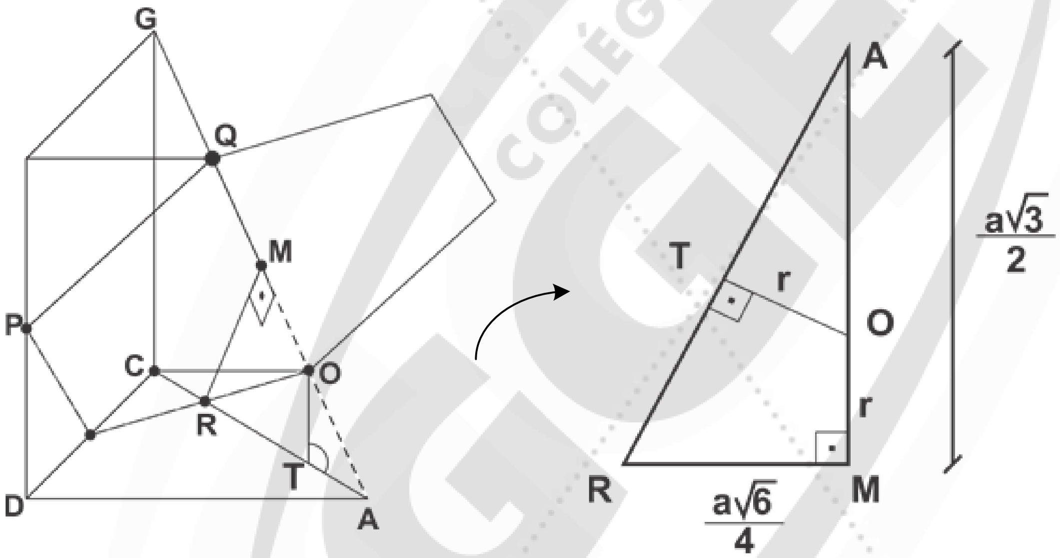
a)



$$\text{apotema} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

b) Note que AG é a interseção dos planos bissetores dos diedros formados pelas faces do triedro de vértice A. Logo todas as pontas do segmento AG são equidistantes das faces deste triedro. Seja M o ponto médio de AG.

$$AG = a\sqrt{3} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



$$AR^2 = \frac{a^2 \cdot 6}{16} + \frac{a^2 \cdot 12}{16} = \frac{a^2 \cdot 18}{16}$$

$$\Rightarrow AR = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$$

$$AOT \sim ARM \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} - r}{r} = \frac{3\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{6}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow 3r = \frac{3a}{2} - \sqrt{3}r$$

$$\Rightarrow r = \frac{3a}{2\left(3+\sqrt{3}\right)} = \frac{3a\left(3-\sqrt{3}\right)}{2(9-3)} = \frac{a\left(3-\sqrt{3}\right)}{4}$$